

# CONVERGENCIA EN PROCESOS ITERATIVOS DEL PUNTO FIJO EN AMBIENTES MÉTRICOS

KENYI JAVIER CALDERÓN SÁNCHEZ



UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

JAÉN, ESPAÑA

2022

# CONVERGENCIA EN PROCESOS ITERATIVOS DEL PUNTO FIJO EN AMBIENTES MÉTRICOS

KENYI JAVIER CALDERÓN SÁNCHEZ

TESIS DOCTORAL SOMETIDA COMO  
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL GRADO DE  
DOCTOR EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR  
PROF. DR. D. J. MARTÍNEZ MORENO  
CODIRECTOR  
PROF. DR. D. E. ROJAS

UNIVERSIDAD DE JAÉN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
JAÉN, ESPAÑA

2022

## Dedicatoria

*Hay personas que se nos adelantan en el camino para ir preparándonos la llegada; es por esto que quiero dedicar este trabajo al hombre que hizo posible este gran éxito. “Gracias papá”.*

*A la memoria de Gustavo Calderón*

# Agradecimientos

A mi esposa Juliana y mi hijo Oliver, por el cariño y apoyo moral que siempre he recibido de su parte, por comprender los meses de mi ausencia mientras realizaba las estancias doctorales. A mi madre que es el ser más maravilloso de todo el mundo. Gracias por el apoyo moral, tu amor y comprensión que desde niño me has brindado, por guiar mi camino y estar junto a mí en los momentos más difíciles. A mi padre porque desde pequeño ha sido para mí un héroe al que siempre he admirado. Gracias por guiar mi vida con energía, esto ha hecho que sea lo que soy. A mis hermanas quienes siempre me alentaron a lograr cumplir mis objetivos.

Al profesor Juan Martínez Moreno, gracias a sus consejos, paciencia y comprensión he llegado a culminar mis estudios. Al profesor Edixon Rojas quién siempre tuvo la plena disposición de ayudarme. También quisiera agradecer al profesor Mohamed Amine Khamsi quien con sus valiosos comentarios, aportes y sugerencias han permitido culminar con éxito esta investigación. Agradezco enormemente a la Universidad de Ciencias Aplicadas y Ambientales (U.D.C.A) quien me dio la oportunidad de realizar este logro académico. Mi Agradecimiento también se extiende al departamento de matemáticas de la Universidad de Jaén quien me abrió sus puertas y siempre me hicieron sentir bienvenido. Finalmente doy gracias a la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado AUIP. Quien en una gran alianza con la universidad de Ciencias aplicadas y Ambientales y la Universidad de Jaén, me permitió realizar los estudios de doctorado.

# Resumen

La teoría del punto fijo, surge a finales del siglo XIX y su primordial objetivo consiste en establecer la existencia y unicidad de soluciones para cierto tipo de ecuaciones diferenciales e integrables. En el trabajo realizado se estudian procesos iterativos los cuales son la composición de un elemento consigo mismo en forma repetitiva partiendo de un punto inicial dado. Se construyen procesos iterativos con algunos términos extras que llamamos perturbaciones, demostrando que dichos procesos convergen algún punto fijo de algún operador que cumpla con ciertas condiciones de contractividad, todo esto enmarcado en espacios métricos de curvatura no positiva. Los resultados obtenidos mejoran y amplían resultados reportados en diversos artículos. También proporcionamos ejemplos para ilustrar el comportamiento de convergencia de los algoritmos propuestos y así comparar numéricamente la convergencia de los esquemas iterativos propuestos con los esquemas existentes.

**Palabras claves:** Punto fijo, Espacios Métricos de Curvatura No Positiva, Iteraciones, Perturbaciones.

# Abstract

The theory of the fixed point, arises at the end of the XIX century and its main objective is to establish the existence and uniqueness of solutions for certain types of differential and integrable equations. In the work carried out, iterative processes are studied which are the composition of an element with itself in a repetitive way, starting from a given starting point. Iterative processes are built with some extra terms that we call perturbations, showing that these processes converge to some fixed point of some operator that meets certain contractivity conditions, all this in metric spaces of non-Positive curvature. The results obtained improve and extend the results reported in various papers. We also provide examples to illustrate the convergence behavior of the proposed algorithms and thus numerically compare the convergence of the proposed iterative scheme with the existing schemes.

**Keywords:** Fixed point, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Iterations, Perturbations.

---



---

# TABLA DE CONTENIDO

<b>Lista de figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Introducción</b> . . . . .	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1 Espacios Métricos . . . . .	8
1.2 Espacios Normados . . . . .	10
1.3 Espacios de Hilbert . . . . .	11
1.4 Espacios Métricos Geodésicos . . . . .	13
1.5 Espacios Métricos $CAT(\kappa)$ . . . . .	23
1.6 Espacios Métricos $CAT(0)$ . . . . .	25
1.7 Espacios Métricos $CAT_p(0)$ . . . . .	32
1.8 Espacios Métricos Hiperbólicos . . . . .	36
1.9 $\Delta$ -Convergencia . . . . .	43
1.10 Procesos Iterativos . . . . .	46
1.10.1 Método Iterativo de Mann . . . . .	47
1.10.2 Método Iterativo de Ishikawa . . . . .	50
1.10.3 Iteración de Mann e Ishikawa con errores . . . . .	53
1.10.4 Iteración de Mann e Ishikawa modificados . . . . .	54
1.10.5 Iteración de Mann perturbada . . . . .	56
1.10.6 Proceso S-iterativo . . . . .	57
1.10.7 Proceso iterativo “CR” . . . . .	59
1.10.8 Iteración Modificada híbrida-Ishikawa . . . . .	60
1.10.9 Algoritmo de punto proximal . . . . .	61
<b>2 Algoritmo Híbrido con perturbaciones para aplicaciones totalmente asintóticamente no expansivas en espacios métricos <math>CAT(0)</math></b>	<b>64</b>
2.1 Aplicaciones asintóticamente no expansivas . . . . .	64
2.2 Iteración Híbrida con perturbaciones . . . . .	65
2.3 $\Delta$ -Convergencia y Convergencia Fuerte . . . . .	66
2.4 Ejemplos Numéricos . . . . .	74

2.4.1	Ejemplo . . . . .	74
2.4.2	Ejemplo . . . . .	74
2.4.3	Ejemplo . . . . .	77
2.4.4	Ejemplo . . . . .	77
<b>3</b>	<b>Aproximaciones perturbadas para aplicaciones no expansivas en espacios métricos CAT(0) generalizados</b>	<b>80</b>
3.1	$\Delta$ -Convergencia y Convergencia Fuerte . . . . .	80
3.2	Algoritmo de punto proximal en espacios CAT(0). . . . .	85
3.3	Algoritmo de punto proximal en espacios CAT( $\kappa$ ). . . . .	87
3.4	Punto fijo en aplicaciones $\alpha$ no expansivas . . . . .	88
3.5	Ejemplos Numéricos . . . . .	91
3.5.1	Ejemplo . . . . .	91
3.5.2	Ejemplo . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Aproximación de puntos fijos en aplicaciones Suzuki <math>(\alpha, \beta)</math>-no expansivas en espacios métricos hiperbólicos parcialmente ordenados.</b>	<b>95</b>
4.1	Resultados de existencia en el proceso iterativo Picard . . . . .	96
4.2	Resultado de existencia en el Proceso iterativo “CR” . . . . .	100
4.3	Resultados de convergencia . . . . .	104
4.4	Algunos Problemas Abiertos . . . . .	110
4.4.1	Problema 1 . . . . .	110
4.4.2	Problema 2 . . . . .	111
	<b>Bibliografía</b>	<b>113</b>

---

---

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Triángulo Geodésico . . . . .	19
1.2	Triángulo Geodésico . . . . .	26
2.1	Gráfica de convergencia ejemplo 2.4.1 . . . . .	75
2.2	Gráfica de convergencia ejemplo 2.4.1 . . . . .	76
2.3	Gráfica de convergencia ejemplo 2.4.1 . . . . .	76
2.4	Gráfica de convergencia ejemplo 2.4.2 . . . . .	78
2.5	Gráfica de convergencia ejemplo 2.4.3 . . . . .	79
2.6	Gráfica de convergencia ejemplo 2.4.4 . . . . .	79
3.1	Gráfica de convergencia ejemplo 3.5.1 . . . . .	92
3.2	Gráfica de convergencia ejemplo 3.5.1 . . . . .	94



---

---

# INTRODUCCIÓN

La teoría de la existencia de un punto fijo de una función o un operador constituye un campo que ha sido ampliamente estudiado en las últimas cinco décadas. El problema del punto fijo (con base a la teoría del punto fijo) puede expresarse como:

*Dado  $X$  un conjunto,  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $X$ , tal que  $A \cap B \neq \emptyset$  y  $f : A \rightarrow B$  una aplicación, ¿Existe un punto  $x \in A$  de modo que  $f(x) = x$ ?*

Los teoremas del punto fijo tienen aplicaciones en muchas ramas tan diferentes de las matemáticas como el análisis, la geometría o los sistemas dinámicos. Además, proporcionan herramientas de resolución utilizadas en otras áreas del conocimiento sin una conexión aparente con la matemática. Por ejemplo, muchos problemas de equilibrio y estabilidad propios de la economía o de la teoría de juegos se pueden estudiar y modelar utilizando la existencia y estabilidad de puntos fijos de ciertos operadores.

A grandes rasgos, la teoría del punto fijo se divide en tres áreas principales: Teoría métrica del punto fijo, Teoría topológica del punto fijo y Teoría discreta de puntos fijos. Históricamente, los límites entre las tres áreas fueron definidas por el descubrimiento de tres teoremas principales respectivamente como lo enunciamos a continuación: Teorema del punto fijo de Banach [60], Teorema de punto fijo de Brouwer [39] y Teorema del punto fijo de Tarski [6]. En este documento nos centraremos principalmente en la primera área (Teoría métrica del Punto fijo) teniendo en cuenta que en algunas ocasiones podemos referenciar de vez en cuando conceptos claves de las otras dos áreas. Esta teoría se ha diversificado en múltiples direcciones, mediante la generalización de instrumentos clásicos y la mejora constante de conceptos y resultados.

La teoría del punto fijo es una herramienta potente y prometedora de lo que actualmente se conoce como matemáticas modernas y a su vez puede considerarse uno de los temas principales del análisis no lineal. En los últimos 50 años, la teoría del punto fijo ha sido un área de bastante interés en la cual se han obtenido importantes resultados en diversas líneas de investigación. Los inicios de la teoría del punto fijo, surge a finales del siglo

XIX y su primordial objetivo consiste en establecer la existencia y unicidad de soluciones para cierto tipo de ecuaciones diferenciales e integrales. Es importante señalar que la formulación abstracta de Banach se acredita como el punto de partida para la teoría de punto fijo métrico,. Stefan Banach en 1922 publicó la demostración de un magnífico teorema que recogía las condiciones necesarias para la existencia y unicidad del punto fijo para aplicaciones  $T : X \rightarrow X$  donde  $X$  es un espacio métrico completo y  $T$  es una contracción, es decir, una aplicación  $T$  que satisface la desigualdad siguiente:

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

para todo  $x, y \in X$  con  $k \in (0, 1)$  fijo (llamada constante de Lipschitz). Además, este resultado proporciona un método constructivo (conocido como iteraciones de Picard) para encontrar el punto fijo de la aplicación a través de la convergencia de las iteradas de la misma y en él se determina la velocidad de convergencia de las iteraciones de Picard al único punto fijo. Desde entonces, este principio ha sido continuamente mejorado y extendido en muchas direcciones.

Otra etapa en el desarrollo de la teoría métrica de punto fijo se inicia con el resultado de punto fijo para operadores no expansivos de Kirk [81], donde se establece que en un espacio de Banach cualquier operador no expansivo definido sobre un conjunto no vacío, débilmente compacto, convexo y con estructura normal tiene un punto fijo. Este teorema generalmente se conoce en una forma particular como el Teorema de Browder-Göhde-Kirk porque Browder [22, 23] y Göhde [20] también probaron independientemente el resultado en espacios de Hilbert y espacios de Banach uniformemente convexos. Estos resultados han llamado la atención de un gran número de investigadores que han comenzado a estudiar con más detalle la interacción entre las propiedades geométricas del espacio de trabajo y la existencia de puntos fijos y la convergencia de iteraciones para varios esquemas iterativos o condiciones de contracción.

Ahora bien, si en lugar de considerar contracciones (como anteriormente) en espacio métricos completos  $X$ , consideramos contracciones no expansivas, i.e. aplicaciones  $T : X \rightarrow X$  que satisfacen

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

para todo  $x, y \in X$ , entonces en el contexto general de espacios métricos no necesariamente se garantiza la existencia de puntos fijos para estos operadores. Podemos encontrar en la literatura ejemplos simples de operadores no expansivos en los cuales la iteración de Picard

$\{T^n x_0\}$  no converge a ningún punto  $x_0 \in X$ . Kirk [82] ha demostrado un teorema del punto fijo para operadores no expansivos en espacios métricos acotados para los que existe una estructura convexa que es normal y numerablemente compacta.

En 1955 el matemático Krasnoselskij en un brillante trabajo [48] realizó una demostración de manera constructiva para un operador no expansivo  $T : M \rightarrow M$  con  $M \subseteq X$  compacto y  $X$  uniformemente convexo y considerando la órbita del operador  $T_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}I$ . Finalmente Krasnoselskij llegó a la conclusión que la iteración de Picard  $T_{\frac{1}{2}}$  converge a un punto fijo de  $T$ . Schaefer extendió el resultado de Krasnoselskij en una publicación hecha en 1955 [27] considerando  $T_\alpha = \alpha T + \alpha(1 - \alpha)I$  para cualquier  $\alpha \in (0, 1)$  y  $X$  uniformemente convexo.

A partir de este trabajo muchos autores han continuado bajo esta línea de investigación dando grandes avances, uno de estos tantos trabajo fue el realizado por Groetsch [15] en 1972 consideró la iteración de Mann generalizada, hoy conocida como iteración de Krasnoselskij-Mann, definida por

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n$$

donde  $\alpha_n \in (0, 1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  bajo la suposición  $\sum(1 - \alpha_k)\alpha_k = \infty$  demostró la regularidad asintótica de la iteración de Krasnoselskii-Mann cuando  $X$  es uniformemente convexo.

En 1976 Ishikawa [66] probó la regularidad asintótica de la iteración de Krasnoselskij-Mann en un espacio de Banach general suponiendo que  $\sum \alpha_k$  diverge y  $0 \leq \alpha_k \leq \alpha < 1$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . El proceso iterativo de Ishikawa se formula como

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T [(1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n]$$

donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  y  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  son sucesiones de números positivos en el intervalo  $[0, 1]$ . Fue introducida por primera vez por Ishikawa [65] en 1974, para aproximar los puntos fijos de los operadores pseudocontractivos lipschitzianos, porque en el caso de que  $T$  sea solo pseudocontractivo, la iteración de Mann no converge generalmente al punto fijo de  $T$ , como lo señalaron Hicks y Kubicek [73].

En los últimos años varios autores han estudiado exhaustivamente los esquemas iterativos de uno y dos pasos (incluidos los procesos de iteración de Mann e Ishikawa como los casos más importantes) para resolver ecuaciones de operadores no lineales, en espacios de Hilbert y Banach, como el propuesto en el 2007 por Agarwal et al. [55] donde introduce

un nuevo metodo iterativo denominado “S-iteration process” el cual es independiente de las iteraciones de Ishikawa y por lo tanto la de Mann, además converge más rápido que éstas dos.

Otro métodos iterativos que valen la pena mencionar en este documento debido a su importancia en los objetivos a desarrollar a lo largo del escrito son las iteraciones de punto fijo con errores las cuales fueron introducidas por Liu [40], [41], la idea surge al analizar los cálculos numéricos prácticos; varios trabajos investigativos se han enfocado en este tipo de iteraciones debido al problema de la estabilidad.

Ahora mencionaremos de manera muy general algunos de los ambientes métricos donde estos esquemas iterativos mencionados anteriormente toman relevancia en la búsqueda de aproximación de puntos fijos para operadores de tipo contractivo. Existen actualmente diversos espacios métricos debido a que son una herramienta muy importante para modelar y resolver distintos procesos naturales. La estructura de un espacio métrico es realmente demasiado general para poder aplicar las teorías que se utilizan en el estudio de estos procesos. Es por ello que las estructuras métricas útiles a estos efectos poseen ciertas características y restricciones geométricas que les proporcionan la regularidad necesaria para poder trabajar con ellas, como lo son ciertas propiedades geométricas (estructura normal, convexidad uniforme, etc.) las cuales juegan un papel fundamental, así como la búsqueda de ejemplos de espacios métricos que posean dichas propiedades. Entre los espacios métricos que a este respecto han recibido más atención en los últimos años destacan los espacios de curvatura acotada, que son un caso particular de espacio de longitud y espacio geodésico. La característica fundamental de estos espacios es el hecho de que sus puntos están unidos por geodésicas que, en líneas generales, son curvas sobre los espacios cuya longitud es igual que la distancia entre los puntos que une.

El ambiente principal de trabajo de esta memoria se sitúa en los espacios métricos geodésicos. Esto es, espacios métricos  $(X, d)$  dotados de una trayectoria geodésica de un punto  $x \in X$  a otro punto  $y \in X$  que es un operador que conserva la distancia  $c : [0, l] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  de modo que  $c(0) = x$ ,  $c(l) = y$ . La imagen  $c([0, l])$  de  $c$  forma un segmento geodésico (no necesariamente único) que une a  $x$  e  $y$ . Un espacio métrico se dice geodésico si cada dos puntos de él pueden unirse por un camino geodésico.

En esta memoria nos centraremos principalmente en estudiar la convergencia de algunos métodos iterativos del Punto Fijo en algunos de estos espacios métricos. Dentro de los espacios métricos geodésicos, un conjunto es convexo si incluye algún segmento

geodésico que une cada dos puntos pertenecientes al conjunto. Una clase importante de espacios métricos geodésicos es la de los espacios de curvatura acotados introducidos por Alexandrov [2]. El estudio de espacios de curvatura no positiva también conocidos como espacios  $CAT(0)$  tiene su origen con el descubrimiento de espacios hiperbólicos, trabajo realizado por el matemático J. Hadamard a principios del siglo pasado y en el trabajo de E. Cartan en la década de 1920. La idea de lo que significa que un espacio métrico geodésico tenga una curvatura no positiva (o, más generalmente, una curvatura limitada por un número real  $k$ ) se remonta al trabajo de H. Busemann y A.D.Alexandrov en la década de 1950.

Posteriormente, Gromov [50] contribuyó a una mejor comprensión de estos espacios y los denominó espacios  $CAT(\kappa)$  en honor a Cartan, Alexandrov y Topogonov, cada uno de los cuales consideró condiciones espaciales similares. La contribución de Gromov condujo a un desarrollo significativo en la física teórica que atrajo el interés de los investigadores. Los espacios  $CAT(0)$  completos son reflectantes. Una excelente introducción al estudio de estos espacios son las conferencias que Mikhael Gromov dio en 1981 en el Collège de France en París (ver [49]). En esta conferencia, Gromov explicó las principales características de la geometría riemanniana global esencialmente basando su explicación en la llamada desigualdad  $CAT(0)$ .

En [85] se muestra que muchas de las ideas y métodos estándar de el análisis no lineal y la teoría del espacio de Banach se transfieren a la clase de espacios que Gromov bautizó espacios  $CAT(0)$ . (Las siglas C, A y T hacen referencia a los matemáticos Cartan, Alexandrov y Topogonov.) Se dice que un espacio métrico  $X$  es un espacio  $CAT(0)$  si está conectado geodésicamente, y si cada triángulo geodésico en  $X$  es al menos tan “delgado” como su triángulo de comparación en el plano euclidiano. Profundizaremos más en estos conceptos a lo largo del documento al igual que la propiedad, conocida como la desigualdad  $CAT(0)$ , la que encapsula el concepto de curvatura no positiva en la geometría riemanniana y además nos permite reflejar el mismo concepto en un entorno mucho más amplio, como quedará descrito en la memoria.

Casi siempre asumiremos la completitud de estos espacios también. Los espacios  $CAT(0)$  completos en la literatura a menudo también se denominan espacios Hadamard. Los espacios  $CAT(0)$  tienen una estructura geométrica bastante poderosa y notablemente agradable, ya que en tales espacios existen ángulos en un sentido fuerte, la función de distancia es convexa, además poseen convexidad uniforme y proyección ortogonal sobre

subconjuntos convexos, etc. Además, debido a su generalidad, los espacios  $\text{CAT}(0)$  surgen en una amplia variedad de contextos. En los espacios  $\text{CAT}(0)$ , las contracciones no expansivas surgen naturalmente en el estudio de isometrías o, más generalmente, en isometrías locales.

Dentro del marco de espacios hiperbólicos los espacios métricos  $\text{CAT}(0)$  son análogos de los espacios de Hilbert en el análisis no lineal. Sin embargo, tal analogía podría ser engañosa. Los espacios  $\text{CAT}(0)$  incluyen todos los  $\mathbb{R}$ -trees y estos espacios tienen poco parecido a los espacios de Hilbert. Una excelente introducción a muchos de los recientes, y no tan recientes, estudios sobre estos espacios de curvatura acotada son el libro de M.R. Bridson and A. Haefliger [49], para un análisis más elemental de algunos de estos conceptos se pueden encontrar en el libro de Burago et al. [19].

El objetivo de la primera parte de la tesis es definir iteraciones de dos o tres pasos con pequeñas perturbaciones, esto con el fin de mostrar que dichas perturbaciones logran mejorar la velocidad de convergencia dependiendo de la contractividad, además estos esquemas iterativos poseen como casos especiales los ya mencionados anteriormente (Iteración de Ishikawa, Mann entre otros). Las perturbaciones están presentes en varios fenómenos de la naturaleza por ejemplo en astronomía, una perturbación es la modificación que experimenta el movimiento de un astro a lo largo de su órbita como consecuencia de la atracción ejercida por los astros próximos. Otro ejemplo es el de la teoría de perturbaciones la cual permite obtener aproximaciones de los valores y funciones propios de un sistema tomando como punto de partida a un sistema referencia, esta teoría a dado grandes frutos en la mecánica cuántica, en la cual se toma un conjunto de esquemas aproximados para describir sistemas cuánticos complicados en términos de otros más sencillos. Estos son algunos ejemplos donde las perturbaciones toman gran importancia en los fenómenos naturales, es por esto que quisimos involucrar este tipo de perturbación a los esquemas iterativos de punto fijo, adaptándolos a diversos ambientes métricos.

En una primera instancia empleamos aplicaciones totalmente asintóticas y además no expansivas, demostrando que las iteraciones perturbadas converge al punto fijo de dichas aplicaciones. En una segunda instancia se propone una iteración perturbada tomando como referencia a la iteración propuesta por Agarwal, esto con el fin de buscar convergencia en aplicaciones no expansivas. Finalmente siguiendo en la búsqueda de procesos iterativos establecemos unas aplicaciones denominadas monótonas  $(\alpha, \beta)$ -no expansivas, demostrando que existen sucesiones aproximadas de puntos fijos que convergen a dichos

puntos.

Grosso modo parte de los objetivos de esta memoria es realizar un análisis de la convergencia para aproximaciones de punto fijo para ciertas aplicaciones de tipo contractivo, para ello se proponen algunos métodos de iteración de punto fijo demostrando así diferentes tipos de convergencia. Además se proponen algunos ejemplos numéricos donde se evidencia la aproximación al punto fijo, todo esto bajo ciertos ambientes métricos haciendo énfasis en los espacios métricos  $CAT(0)$ . Finalmente este trabajo está dividido en cuatro capítulos que a su vez están subdivididos en diferentes secciones. A continuación pasamos a realizar un breve resumen de ellos.

**Capítulo 1:** En este capítulo se abordan conceptos preliminares por lo tanto reúne fundamentalmente los conceptos más elementales, cabe aclarar que en su mayoría no son de nuestra autoría, más sin embargo se creen necesarios para una excelente comprensión y lectura de todo el documento.

**Capítulo 2:** En este capítulo se establecen algunos teoremas de convergencia de iteraciones de tres pasos en específico para el algoritmo CR híbrido modificado con perturbaciones en aplicaciones asintóticamente no expansiva en un ambiente métrico  $CAT(0)$ .

**Capítulo 3:** En este capítulo utilizamos el concepto de espacios  $CAT_p(0)$  propuesto por Anime Khamsi, establecemos  $\Delta$ -convergencia y convergencia fuerte de una variación a la iteración S propuesta por Agarwal. Finalmente, a partir de ellos deducimos resultados válidos para aplicaciones  $\alpha$ -no expansivas.

**Capítulo 4:** En este capítulo, definimos la clase de aplicaciones monótonas  $(\alpha, \beta)$ -no expansivas y demostramos que existe una sucesión aproximada de puntos fijos, en espacios métricos hiperbólicos parcialmente ordenados.

---

---

## PRELIMINARES

### 1.1 Espacios Métricos

Los resultados que enunciaremos son ampliamente conocidos pues son resultados clásicos de la teoría de análisis y la topología, es por esto que en los casos, aquí mencionados, omitiremos sus demostraciones, cabe aclarar que la gran mayoría de estas demostraciones son de fácil consulta en varias referencias bibliograficas.

**Definición 1.1.1.** *Una métrica en un conjunto no vacío  $X$ , es una función  $d \rightarrow [0, +\infty$  que asocia a cada par de elementos  $x, y \in X$  un número real positivo  $d(x, y)$ , llamado distancia del punto  $x$  al punto  $y$ , de tal modo que*

*i.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*

*ii.  $d(x, y) = d(y, x)$  (Simetría)*

*iii.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (Desigualdad Triangular)*

Un **espacio métrico** es un par  $(X, d)$ , formado por el conjunto no vacío  $X$  y una métrica  $d$  sobre  $X$ .

#### Ejemplo

Sea  $X \neq \emptyset$  y consideremos  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Nuevamente, es claro que  $d$  es una métrica sobre  $X$  llamada métrica discreta, así el par  $(X, d)$  es llamado espacio métrico discreto.



## Ejemplo

Sea  $X = \mathbb{R}$  y considere  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  definida por

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in X.$$

Nuevamente, es claro  $d$  es una métrica sobre  $X$  llamada métrica usual, así el par  $(X, d)$  es un espacio métrico.

## Ejemplo

Sea  $X = C[a, b]$  el conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$  y considere  $d_\infty : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  definida por

$$d_\infty(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)) : x \in [a, b]\}.$$

Nuevamente, es claro que  $d_\infty$  es una métrica sobre  $X$  llamada métrica uniforme, así el par  $(X, d_\infty)$  es un espacio métrico.

**Definición 1.1.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\{x_n\} \subset X$  y  $x_0 \in X$ . Decimos que  $\{x_n\}$  converge a  $x_0$  y lo denotamos como  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$ .

En otras palabras, decimos  $\{x_n\} \rightarrow x_0$  si y solo si  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x_0) < \varepsilon, \forall n > n_0$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión en  $(X, d)$ . Se dice que  $X$  es completo si toda sucesión de Cauchy en  $X$  converge a un punto de  $X$ .

**Definición 1.1.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo. Entonces,  $\{x_n\} \subset (X, d)$  es una sucesión de Cauchy si, y sólo si,  $\{x_n\}$  es convergente en  $X$ .

## Ejemplo

El espacio métrico  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  es completo.

## Ejemplo

El espacio  $(0, 1) \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$  no es completo.

**Definición 1.1.5.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, d)$  espacio métricos y  $T : X \rightarrow Y$  una función. Entonces  $T$  es una función.

i. **Continua** en un punto  $x_0 \in X$  si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que, si  $y \in X$  y  $d(x_0, y) < \delta \Rightarrow d(T(x_0), T(y)) < \varepsilon$ .

ii. **Continua** en  $X$ , si  $T$  es continua  $\forall x \in X$ .

**Definición 1.1.6.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, d)$  espacio métricos y  $T : X \rightarrow Y$  una función. Se dice que  $T$  es uniformemente continua, si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  tal que,  $\forall x, y \in X$  y  $d(x_0, y) < \delta \Rightarrow d(T(x_0), T(y)) < \varepsilon$

**Definición 1.1.7.** Sean  $(X, d)$  y  $(Y, d)$  espacio métricos y  $T : X \rightarrow Y$  una función. Se dice que  $T$  es semicontinua inferiormente en el punto  $a \in X$  si para cada  $\varepsilon \in Y$  tal que  $\varepsilon < T(a)$  existe  $\delta > 0$  de forma que si  $d(x, a) < \delta$  entonces  $k < T(x)$ . Además  $T$  es semicontinua inferiormente si lo es en cada punto de  $X$ .

## 1.2 Espacios Normados

**Definición 1.2.1.** Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial, una aplicación que hace corresponder a cada valor  $x \in \mathbb{V}$  el número real  $\|x\|$ , se llama norma de  $\mathbb{V}$  si y sólo si, verifica los siguientes axiomas.

i.  $\|x\| \geq 0$  y  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{V}$

iii.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$

Un espacio normado es un par  $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$  donde  $\|\cdot\|$  es una norma sobre  $\mathbb{V}$

### Ejemplo

Consideremos  $\ell_p^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , el espacio vectorial que consiste de todas las n-uplas  $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , donde  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $\ell_p^n$  con la norma

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p}$$

es un espacio normado.

## Ejemplo

Consideremos  $\ell_\infty^n$ , el espacio vectorial de todas las  $n$ -uplas  $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , donde  $\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n$ ,  $\ell_\infty^n$  con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup \{|\alpha_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

es un espacio normado.

**Observación 1.2.1.** *Dado un espacio vectorial  $\mathbb{V}$ , recordemos que si tenemos una norma  $\|\cdot\|$  definida sobre  $\mathbb{V}$ , siempre es posible definir una métrica sobre  $\mathbb{V}$ , consideremos la función definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$$

*$d$  es una métrica en  $\mathbb{V}$ , en consecuencia, todo espacio normado es un espacio métrico.*

**Observación 1.2.2.** *Cuando la distancia  $d$ , asociada a la norma  $\|\cdot\|$  de un espacio  $\mathbb{V}$ , es completa, es decir, cuando toda sucesión de Cauchy es convergente, decimos que la norma  $\|\cdot\|$  es completa o también que el espacio normado  $\mathbb{V}$  es completo. Un espacio de Banach  $E$  es un espacio normado completo.*

De manera más general, dado un subconjunto  $A$  de un espacio normado  $\mathbb{V}$ , decimos que  $A$  es completo cuando toda sucesión de Cauchy de elementos de  $A$  converge a un elemento de  $A$ ; en tal caso, es inmediato comprobar que  $A$  es cerrado en  $\mathbb{V}$ . El recíproco se da cuando el propio  $\mathbb{V}$  es completo, es decir: si  $A$  es un subconjunto de un espacio de Banach, entonces  $A$  es completo si, y sólo si,  $A$  es cerrado en  $\mathbb{V}$ .

## 1.3 Espacios de Hilbert

Daremos algunas definiciones básicas acerca de los espacios de Hilbert, que son los espacios de Banach más perfectos desde un punto de vista geométrico, pues verifican todos los postulados de la geometría euclídea.

**Definición 1.3.1.** *Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  (donde  $\mathbb{K}$  es  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Un producto interno en  $\mathbb{V}$  es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$  tal que*

$$i \langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \text{ para todo } x, y \in \mathbb{V}.$$

ii  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  para todo  $x, y, z \in \mathbb{V}$ .

iii  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  para todo  $x, y \in \mathbb{V}$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

iv  $\langle x, x \rangle \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{V}$ .

v  $\langle x, x \rangle = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .

Un espacio vectorial dotado de un producto interno es un espacio prehilbertiano.

## Ejemplo

Uno de los ejemplos de espacio con producto interno más conocido es el espacio  $\ell_2(\mathbb{Z})$

$$\ell_2(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} / x_n \in \mathbb{C} \quad y \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

En este espacio el producto interno está dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \bar{y}_n.$$

**Proposición 1.3.1. Desigualdad de Cauchy–Schwarz:** Sea  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno, entonces para todo  $x, y \in X$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$$

**Proposición 1.3.2.** Sea  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio con producto interno. Si definimos

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

entonces  $\|\cdot\|$  es una norma en  $X$ .

Además, esta norma satisface la ley del paralelogramo, es decir para todo  $x, y \in X$ :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

**Definición 1.3.2.** Un espacio de Hilbert  $H$  es un espacio vectorial con producto interno que es completo con respecto a la norma dada por el producto interno.

## Ejemplo

**Espacios de dimensión finita.** Para  $N > 1$  y  $1 \leq p < \infty$  usamos  $\ell_p^N$  los dos primeros vectores básicos  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  y  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , observemos que  $\|e_1 \pm e_2\|_p = 2^{1/p}$  y deducimos que sólo se verifica la igualdad del paralelograma cuando  $p = 2$ . Análogo razonamiento muestra que  $\ell_\infty^N$  tampoco verifica la igualdad del paralelograma. Recíprocamente, sabemos que la norma euclídea en  $\mathbb{K}^N$  procede de un producto escalar. Por tanto: dados  $N > 1$  y  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\ell_\infty^N$  es un espacio de Hilbert si y sólo si,  $p = 2$ .

## Ejemplo

**Espacios de sucesiones.** El mismo razonamiento del ejemplo anterior se aplica a los espacios de sucesiones  $\ell_p$  con  $1 \leq p \leq \infty$ , usando los dos primeros vectores unidad, con lo que obtenemos: para  $1 \leq p \leq \infty$ , el espacio de Banach  $\ell_p$  es un espacio de Hilbert si, sólo si,  $p = 2$ . El producto interno de  $\ell_2$  viene dado por:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} \quad x, y \in \ell_2$$

Este es el ejemplo más relevante de espacio de Hilbert de dimensión infinita.

## 1.4 Espacios Métricos Geodésicos

Esta parte del documento es una breve introducción a la geometría de los espacios geodésicos. Las ideas que encontrará aquí son elementales, y las hemos escrito con la intención de contextualizar los ambientes métricos en los cuales se desarrollaran los resultados principales de este documento. Iniciaremos dando las definiciones de espacios métricos de longitud. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico cualquiera.

**Definición 1.4.1.** Sean  $a$  y  $b$  dos números reales tales que  $a \leq b$ . Decimos que  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  es un camino o curva en  $X$  si es una aplicación continua.

Consideremos una partición  $\Upsilon$  de  $[a, b]$ , es decir, una colección finita de puntos  $\Upsilon = \{y_0, \dots, y_n\}$  tal que  $a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n = b$

**Definición 1.4.2.** Sea  $\gamma$  un camino en  $X$ . Llamamos longitud de  $\gamma$ ,  $L(\gamma)$ , al supremo de

todas las siguientes sumas

$$\sum(\Upsilon) = \sum_{i=1}^N d(\gamma(y_{i-1}), \gamma(y_i)),$$

donde  $\Upsilon$  varía en el conjunto de todas las participaciones del intervalo  $[a, b]$ . Diremos que el camino  $\gamma$  es rectificable si su longitud es finita.

**Definición 1.4.3.** Se dice que  $X$  es un espacio de longitud si la distancia entre cualesquiera dos puntos del espacio viene dado por el ínfimo de las longitudes de todos los caminos rectificables que los unen, es decir,

$$d(x, y) = \inf \{L(\gamma) : \gamma \text{ camino rectificable que une } x \text{ e } y\}.$$

Una distancia  $d$  que verifique la última propiedad descrita recibe el nombre de métrica de longitud o métrica intrínseca.

De esta definición podemos deducir que, en un espacio de longitud, todo par de puntos en  $X$  está conectado por al menos un camino rectificable. Además otra consecuencia de esta definición es que todo espacio de longitud es un espacio convexo.

**Definición 1.4.4.** Una geodésica entre dos puntos  $x, y \in X$  es un camino geodésico  $c : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $c(0) = x, c(l) = y, y$

$$d(c(t), c(t')) = |t - t'| \text{ para todo } t, t' \in [0, l].$$

está claro que  $c$  es una isometría y que  $d(x, y) = l$ . La imagen  $\alpha$  de  $c$  recibe el nombre de segmento geodésico que une  $x, y$ . Si analizamos la definición de longitud de un camino también se deduce que  $L(c) = l$  si  $c$  es un geodésica. En un espacio de longitud, las geodésicas son caminos cuya longitud coincide con la distancia entre sus extremos  $x$  e  $y$ , entonces

$$L(c') \geq d(x, y) = L(c) = l,$$

cualquiera que sea el camino  $c'$  que una  $x$  e  $y$ . Teniendo en cuenta además que las geodésicas son los únicos caminos que verifican las condición anterior que sólo depende de la longitud de los mismos.

**Definición 1.4.5.** Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo. Y sea una aplicación  $c : I \rightarrow X$ , es llamada geodésica linealmente parametrizada o una geodésica de velocidad constante, si entonces existe una constante  $\lambda$  tal que  $d(c(t), c(t')) = \lambda|t - t'|$  para todo  $t, t' \in I$ . Bajo las mismas hipótesis, decimos que  $c$  parametriza su imagen proporcionalmente a la longitud del arco.

**Definición 1.4.6.** Una geodésica local en  $X$  es una aplicación  $c$  en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  a  $X$  con la propiedad que para todo  $t \in I$  entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$  para todo  $t', t'' \in I$  con  $|t - t'| + |t - t''| \leq \varepsilon$

Es importante resaltar que en la definición de geodésica es un poco más restrictiva que la que usualmente se utiliza en geometría diferencial. Las geodésicas en geometría diferencial son geodésicas más de tipo locales de acuerdo a las definiciones que hemos enunciado. De forma más general, una geodésica local no necesariamente es una geodésica. Por ejemplo, si en el círculo  $\mathbb{S}^1$  se da más de media vuelta a rapidez constante se tiene una geodésica local que no es una geodésica en el sentido estricto. De manera intuitiva, una de las propiedades de las geodésicas aquí mencionadas es que siempre se alejan del punto del que inician a medida que son recorridas.

**Definición 1.4.7.**  $(X, d)$  se dice que es un espacio métrico geodésico (o, simplemente un espacio geodésico) si cada dos puntos en  $X$  están unidos por una geodésica. Decimos que  $(X, d)$  es unívocamente geodésico si hay exactamente una geodésica que une  $x$  a  $y$ , para todo  $x, y \in X$ .

**Definición 1.4.8.** Sean  $X$  un espacio métrico unívocamente geodésico y  $C$  un subespacio de  $X$ . Entonces,  $C$  es geodésico si y sólo si es un subespacio convexo.

## Ejemplo

El ejemplo más familiar de un espacio métrico unívocamente geodésico es  $\mathbb{E}^n$ , el espacio euclideo  $n$ -dimensional, esto es  $\mathbb{R}^n$  con la métrica euclídea usual. Ahora el segmento geodésico único que une dos puntos  $x$  y  $y$  es el segmento de línea entre ellos, es decir, el conjunto de puntos  $\{(1 - t)x + ty | 0 \leq t \leq 1\}$ . Un subconjunto  $C$  es convexo en el sentido de la definición anterior si y sólo si es convexo en el sentido lineal, es decir, si el segmento lineal que une cada par de puntos de  $C$  está completamente contenido en  $C$ . Un subconjunto  $X \subset \mathbb{E}^n$ ; es un espacio geodésico si y sólo si es convexo. De manera más general, cuando está dotado de la métrica inducida, un subconjunto de un espacio métrico unívocamente geodésico será geodésico si y sólo si es convexo. Por ejemplo, un círculo en  $\mathbb{E}^2$  con la métrica inducida no es un espacio geodésico, sino simplemente un disco redondo. [[49], Ejemplo 1.5]

**Proposición 1.4.1.** Todo espacio vectorial normado  $\mathbb{V}$  es un espacio métrico geodésico. Es unívocamente geodésico si y sólo si la bola unitaria en  $\mathbb{V}$  es estrictamente convexa (en el

sentido de que si  $u_1$  y  $u_2$  son vectores distintos de norma 1, entonces  $\|(1-y)u_1 + yu_2\| < 1$  para todo  $t \in (0, 1)$ .

## Ejemplo

**Las normas  $\ell^1$  y  $\ell^\infty$  en  $\mathbb{R}^n$ .** La norma  $\ell^1$  del vector  $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$  se define como  $\sum |x_i|$  y la norma  $\ell^\infty$  de  $x$  se define como  $\max_i |x_i|$ . Es obvio que las aplicaciones  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  así definidas son de hecho normas. Denotamos las métricas asociadas por  $d_1$  y  $d_\infty$  respectivamente. Si  $n \geq 2$  entonces ni la bola unitaria en  $(\mathbb{R}^n, d_1)$  ni la de  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  son estrictamente convexas, es entonces por la proposición (1.4.1) estos espacios no son únicos geodésicos. [[49], Ejemplo 1.7]

**Proposición 1.4.2.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para todo número real  $p > 1$ , la aplicación  $x \rightarrow \|x\|_p$  define una norma en  $\mathbb{R}^n$ . En particular para dos vectores distintos de cero  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tenemos

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Además, la igualdad en esta expresión se obtiene si y sólo si  $x$  es un múltiplo positivo de  $y$ , por lo tanto, para todo  $1 < p < \infty$  el espacio métrico  $(\mathbb{R}^n, d_p)$  asociado a la norma  $\ell^p$  es unívocamente geodésico.

**Demostración.** Para demostrar la desigualdad triangular, considere el número real  $q > 1$ , definido por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.4.1)$$

Afirmamos que para cualquier número real  $a \geq 0, b \geq 0$  se tiene

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

la igualdad se da, si y sólo si  $a = b$ . El caso no trivial se da cuando  $a > 0$  y  $b > 0$ . Entonces, dado que la función  $\log : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente cóncava, tenemos

$$\log \left( \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \log a + \frac{1}{q} \log b$$

la igualdad se da, si y sólo si  $a = b$ . Al componer ambos lados de esta desigualdad con la función exponencial que bien sabemos que es estrictamente creciente, obtenemos



$a/p + b/q \geq a^{1/p}b^{1/q}$ , en donde la igualdad se da, si y sólo si  $a = b$ .

Recordemos que dado dos vectores  $x = (x_1 \dots x_n)$  y  $y = (y_1 \dots y_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  tenemos la desigualdad de Holder

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \quad (1.4.2)$$

Verificaremos está desigualdad para el caso no trivial  $x \neq 0, y \neq 0$ . Aplicando la desigualdad (1.4.1) a  $a_i = \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}$  y  $b_i = \frac{|y_i|^p}{\|y\|_q^p}$ , tenemos

$$\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} \frac{|y_i|^p}{\|y\|_q^p} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^p}{\|y\|_q^p}$$

Sumando sobre  $i = 1, \dots, n$ , obtenemos la desigualdad de Holder y vemos que la igualdad se cumple si y sólo si  $a_i = b_i$ ; para cada  $i$ .

Ahora estamos preparados para demostrar la desigualdad triángular para  $d_p$ . se tiene para cada  $i = 1, \dots, n$

$$|x_i + y_i|^p \leq |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \quad (1.4.3)$$

De la desigualdad de Holder obtenemos

$$\sum_{i=1}^n |x_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \quad (1.4.4)$$

$$\sum_{i=1}^n |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \leq \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \quad (1.4.5)$$

por lo tanto, como  $(p-1)q = p$ ,

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/q}$$

lo que conduce a la desigualdad triángular.

En la desigualdad triangular anterior, la igualdad puede ocurrir si y sólo si la igualdad ocurre simultáneamente en (1.4.3), (1.4.4) y (1.4.5). La igualdad en (1.4.3) implica que  $x_i$

e  $y_i$  tienen el mismo signo y que si  $x$  e  $y$  son distintos de cero, entonces  $x + y$  también es distinto de cero. La igualdad en (1.4.4) y (1.4.5) implica que

$$\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{|x_i + y_i|^q}{\|x_i + y_i\|_q^q} = \frac{|y_i|^p}{\|y\|_p^p}$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ , por lo tanto,  $x$  tiene que ser un múltiplo positivo de  $y$ . Ahora por la proposición (1.4.1),  $(\mathbb{R}, d_p)$  es unívocamente geodésico para todo  $1 < p < \infty$ .

□

Por otra parte, una de las propiedades geométricas más relevante de los espacios de Banach para la Teoría Métrica del Punto Fijo es la convexidad uniforme. Las características geométricas que esta propiedad proporciona a estos espacios lineales permiten un sin número de aplicaciones las cuales se conocen en distintas publicaciones de alto impacto. En la actualidad, se conocen también distintas aunque similares nociones de convexidad uniforme en el contexto más general de los espacios métricos geodésicos. Estas nociones tratan de rescatar la geometría que la convexidad uniforme proporciona a los espacios lineales en los espacios métricos. Se dice que un subconjunto  $C$  de un espacio métrico  $(X, d)$  es convexo si cada par de puntos  $x, y \in C$  pueden unirse mediante una geodésica en  $X$  y la imagen de cada geodésica está contenida en  $C$ . Si esta condición se cumple para todos los puntos  $x, y \in C$  con  $d(x, y) < r$ , entonces se dice que  $C$  es  $r$ -convexo. Ahora bien si para cada par de puntos  $x$  e  $y$  en un espacio métrico completo  $X$  existe un punto  $m \in X$  tal que  $d(x, m) = d(y, m) = \frac{1}{2}d(x, y)$ , entonces  $X$  es un espacio geodésico. Si tal punto medio existe para todos los puntos  $x, y \in X$  con  $d(x, y) < r$ , entonces  $X$  es  $r$ -geodésico. Enfatizamos que los caminos que comúnmente se llaman geodésicos en geometría diferencial no necesitan ser geodésicos en el sentido anterior; en general solo serán geodésicas locales.

**Definición 1.4.9.** *Un espacio métrico geodésico  $(M, d)$  se dice que es uniformemente convexo si cualesquiera que sean  $r > 0$  y  $\varepsilon \in (0, 2]$  existe  $\delta \in (0, 1]$  tal que para todo  $a, x, y \in M$  con  $d(x, a) \leq r$  y  $d(x, y) \geq \varepsilon r$  se tiene que*

$$d(m, a) \leq (1 - \delta)r,$$

donde  $m$  denota cualquier punto medio entre los puntos  $x$  e  $y$ . Una aplicación  $\delta : (0, \infty) \times (0, 2] \rightarrow (0, 1]$  que proporciona un  $\delta = \delta(r, \varepsilon)$  en las condiciones anteriores para cada  $r > 0$  y  $\varepsilon \in (0, 2]$  fijos se denomina módulo de convexidad de  $M$ .

**Definición 1.4.10.** *Un espacio métrico geodésico  $M$  se dice que es estrictamente convexo si para cualesquiera  $r > 0$ ,  $a, x$  e  $y \in M$  con  $d(x, a) \leq r$ ,  $d(y, a) \leq r$  y  $x \neq y$ , se tiene que  $d(a, p) < r$ , donde  $p$  es cualquier punto entre  $x$  e  $y$  tal que  $p \neq x$  y  $p \neq y$ , es decir,  $p$  es cualquier punto del interior de un segmento geodésico que une  $x$  e  $y$ .*

**Observación 1.4.1.**

- *Cualquier espacio métrico estrictamente convexo es unívocamente geodésico.*
- *Cualquier espacio métrico uniformemente convexo es estrictamente convexo.*

Se dice que la métrica en un espacio  $X$  es convexa si  $X$  es un espacio geodésico y todas las geodésicas  $c_1 : [0, a_1] \rightarrow X$  y  $c_2 : [0, a_2] \rightarrow X$  con  $c_1(0) = c_2(0)$  satisfacen la desigualdad

$$d(c_1(ta_1), c_2(ta_2)) \leq td(c_1(a_1), c_2(a_2))$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . Se dice que  $X$  es localmente convexo si cada punto tiene una vecindad en la que la métrica inducida es convexa. Si el espacio métrico es localmente convexo, entonces, en particular,  $X$  es localmente contráctil y, por tanto,  $X$  tiene un espacio de cobertura universal  $\bar{X}$ .

**Definición 1.4.11.** *Llamamos triángulo geodésico en un espacio  $(X, d)$ , y lo denotamos generalmente  $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ , a una colección de tres puntos de  $X$ , denominados vértices del triángulo y tres segmentos geodésicos, denominados lados del triángulo  $\Delta$ , de modo que tales segmentos unen esos tres vértices del triángulo dos a dos. Diremos que el triángulo es degenerado si los tres vértices pertenecen a la misma geodésica.*



Figura 1.1: Triángulo geodésico (derecha) y su triángulo de comparación (izquierda)

Cabe resaltar que un triángulo  $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$  en  $\mathbb{E}^n$  es llamado triángulo de comparación de  $\Delta = \Delta(p, q, r)$  si  $d(p, q) = d(\bar{p}, \bar{q})$ ,  $d(q, r) = d(\bar{q}, \bar{r})$  y  $d(p, r) = d(\bar{p}, \bar{r})$ . Dicho triángulo  $\bar{\Delta} \subseteq \mathbb{E}^n$  siempre existe, si el perímetro  $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p)$  de  $\Delta$  es menos del doble del diámetro  $D$  en  $\mathbb{E}^n$ . Escribiremos  $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(p, q, r)$  ó  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$  según la elección específica de  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  lo requiera. Un punto  $\bar{x} \in [\bar{q}, \bar{r}]$  es llamado punto de comparación de  $x \in [q, r]$  si  $d(q, r) = d(\bar{q}, \bar{r})$ . Puntos de comparación en  $[\bar{p}, \bar{q}]$  y  $[\bar{p}, \bar{r}]$  se definen de la misma manera. Se llama ángulo de comparación entre  $q$  y  $r$  en  $p$ , y lo designaremos por  $\bar{Z}_p(q, r)$ , al ángulo interior de  $\bar{\Delta}(p, q, r) \in \mathbb{E}^n$  en  $\bar{p}$ . (Este ángulo está bien definido siempre que  $q$  y  $r$  sean ambos distintos de  $p$ .) Si  $p \neq q$  y  $p \neq r$ , el ángulo de  $\Delta$  en  $p$  es el ángulo de Alexandrov entre los segmentos geodésicos  $[p, q]$  y  $[p, r]$  emitido desde  $p$  como se define a continuación,

**Definición 1.4.12.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $c : [0, a] \rightarrow X$  y  $c' : [0, a'] \rightarrow X$  son dos caminos geodésicos con  $c(0) = c'(0)$ . Dado  $t \in (0, a]$  y  $t' \in (0, a']$ , consideramos el triángulo de comparación  $\bar{\Delta}(c(0), c(t), c'(t'))$  y el ángulo de comparación  $\bar{Z}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$ . Llamamos ángulo de Alexandrov o ángulo superior entre dos caminos geodésicos  $c$  y  $c'$  al número  $\angle(c, c') \in [0, \pi]$  definido por:

$$\angle(c, c') := \limsup_{t, t' \rightarrow 0} \bar{Z}_{c(0)}(c(t), c'(t')) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < t, t' < \varepsilon} \bar{Z}_{c(0)}(c(t), c'(t')).$$

Si existe  $\lim_{t, t' \rightarrow 0} \bar{Z}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$ , se dice que el ángulo existe en sentido estricto.

El ángulo entre dos segmentos geodésicos que tienen un punto extremo en común se define como el ángulo entre las únicas geodésicas que parten de ese punto común y cuyas imágenes son los segmentos dados. Se puede expresar  $\angle(c, c')$  en términos de la función distancia al señalar que

$$\cos(\bar{Z}_{c(0)}(c(t), c'(t'))) = \frac{1}{tt'} (t^2 + t'^2 - d(c(t), c'(t'))^2).$$

Note que en  $\mathbb{E}^n$ , el ángulo de Alexandrov es igual al comunmente conocido ángulo Euclidiano.

## Los espacios modelo $M_k^n$

El plano euclídeo tiene curvatura cero, el espacio esférico 1 y el hiperbólico  $-1$ , estos tres espacios se denominan espacios modelos, los cuales tienen una de las más importantes propiedades ya que son variedades riemannianas de curvatura constante. Trabajar únicamente con estos tres espacios a la hora de determinar la curvatura de un espacio geodésico

cualquiera resulta en principio insuficiente ya que éstos tan sólo servirían como referencia para asignar curvatura cero, uno o menos uno a un espacio. El objeto de este apartado es introducir variantes sobre la métrica de estos espacios que pongan a nuestra disposición nuevos espacios de curvatura (de Riemann) cualquiera  $k$ , ya sea positiva o negativa, con los que poder comparar.

**Definición 1.4.13.** *Dado un número real  $\kappa$ , denotamos por  $M_\kappa^n$ , los siguientes espacios métricos:*

1. si  $\kappa = 1$  entonces  $M_0^n$ , es un espacio euclideo  $\mathbb{E}^n$ ;
2. si  $\kappa > 0$  entonces  $M_\kappa^n$  se obtiene de la esfera  $\mathbb{S}^n$  multiplicando la función de distancia por la constante  $1/\sqrt{\kappa}$ ;
3. si  $\kappa < 0$  entonces  $M_\kappa^n$  se obtiene del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  multiplicando la función de distancia por la constante  $1/\sqrt{-\kappa}$

**Observación 1.4.2.** *Se tiene que  $\mathbb{E}^n = M_0^n$ ,  $\mathbb{S}^n = M_1^n$  y  $\mathbb{H}^n = M_{-1}^n$*

**Proposición 1.4.3.**  *$M_\kappa^n$  es un espacio métrico geodésico. Si  $\kappa \leq 0$ , entonces  $M_\kappa^n$ , es unívocamente geodésico y todas la bolas en  $M_\kappa^n$  son convexas. Si  $\kappa > 0$ , entonces hay un segmento geodésico único  $x, y \in M_\kappa^n$  si y solo si  $d(x, y) < \pi/\sqrt{\kappa}$ . Si  $\kappa > 0$ , las bolas cerradas en  $M_\kappa^n$  de radio  $< \pi/(2\sqrt{\kappa})$  son convexas.*

De ahora en adelante escribiremos  $D_\kappa$  para denotar el diámetro de  $M_\kappa^n$ . Siendo más precisos,  $D_\kappa := \pi/\sqrt{\kappa}$  para  $\kappa > 0$  y  $D_\kappa := \infty$  para  $\kappa \leq 0$ .

A continuación, enunciaremos una de las definiciones más importante sobre la curvatura no positiva está basandonos en el sentido de Busemann. Sin embargo, este es solo un paso intermedio para nosotros, ya que necesitaremos una noción más fuerte de curvatura no positiva, que aparecerá más adelante, siendo más precisos en la definición 1.6.1 .

**Definición 1.4.14.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico geodésico. Decimos que  $X$  tiene una curvatura no positiva en el sentido de Busemann si para cada  $x, y, z \in X$  se tiene  $2d(m_1, m_2) \leq d(x, y)$ , donde  $m_1$  es un punto medio de  $[x, z]$  y  $m_2$  es un punto medio de  $[y, z]$ . De manera alternativa se dice que  $(X, d)$  es un espacio Busemann.*

La condición geométrica en la definición significa que un triángulo en un espacio de Busemann es más delgado que su triángulo de comparación en el lugar euclidiano. Tiene una contraparte analítica en términos de convexidad de la función de distancia.

**Proposición 1.4.4.** *Un espacio métrico geodésico  $(X, d)$  es un espacio métrico Busemann si y sólo si, para toda geodésica  $x, y : [0, 1] \rightarrow X$ , la función  $t \rightarrow d(x_t, y_t)$  es convexa en  $[0, 1]$ .*

**Demostración.** Por supuesto, basta con demostrar la implicación de que en los espacios de Busemann la función  $t \rightarrow d(x_t, y_t)$  es convexa. Sea  $m$  un punto medio de  $x_1$  y  $y_0$ . Tenemos

$$d\left(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}\right) \leq d\left(x_{\frac{1}{2}}, m\right) + d\left(m, y_{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{2}d(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d(x_1, y_1),$$

es fácil ver que,

$$d(x_t, y_t) \leq (1 - t)d(x_0, y_0) + td(x_1, y_1),$$

por cada diádica  $t : k/2^l$ , con  $k = 1, \dots, 2^l$  y  $l \in [0, 1]$ . Un argumento de aproximación fácil extiende la última desigualdad para cada  $t \in [0, 1]$ .

Es inmediato que los espacios de Busemann son exclusivamente geodésicos. Un ejemplo típico de espacios de Busemann es un espacio de Banach estrictamente convexo.  $\square$

Aunque la definición de Busemann captura muy bien la esencia de la curvatura no positiva (una variedad de Riemannian completa simplemente conectada tiene una curvatura seccional no positiva si y sólo si es un espacio de Busemann), es demasiado débil para nuestros propósitos. Una gran desventaja de los espacios de Busemann es que las proyecciones métricas sobre conjuntos convexos cerrados no son, en general, no expansivas. Dado que la falta de amplitud de las proyecciones métricas sustenta tantos resultados en los teoremas principales de la presente memoria, necesitamos una noción más sólida de curvatura no positiva debida a Alexandrov. Usando la terminología de Gromov, nos referiremos a espacios de curvatura no positiva en el sentido de Alexandrov como espacios CAT(0) los cuales describiremos más adelante. La diferencia entre la curvatura de Alexandrov y la curvatura de Busemann es similar a la que existe entre los espacios de Hilbert y los espacios de Banach estrictamente convexos. Vale la pena mencionar que también existe una noción de espacios de Busemann uniformes, que en cierto sentido corresponden a espacios

de Banach uniformemente convexos. En realidad, existe una diferencia formulada con precisión entre las curvaturas no positivas de Busemann y Alexandrov. Un espacio métrico geodésico tiene una curvatura no positiva en el sentido de Alexandrov si y solo si tiene una curvatura no positiva en el sentido de Busemann y es un espacio métrico ptolemaico;

## 1.5 Espacios Métricos $CAT(\kappa)$

Los espacios métricos de curvatura acotada son espacios geodésicos que se definen en base a determinadas características de su geometría. Es decir, se representan midiendo como de “gruesos” o “delgados” son sus triángulos geodésicos. Por ejemplo, si sus triángulos son “más gruesos” que los euclídeos, entonces tendremos un espacio de curvatura positiva y si, por el contrario, son “más delgados”, entonces tendremos un espacio de curvatura negativa. De este modo, “el grosor” que tengan los triángulos de un espacio geodésico será determinante para lograr establecer su curvatura. Para poder determinar si un triángulo geodésico es más o menos “grosso”, es necesario indicar la manera de medir “el grosor”. El método que se utiliza para ello es a través de la comparación. Particularmente, se comparan los triángulos de un espacio geodésico con los de otros espacios de curvatura (de Riemann) conocida. Es así como, según el resultado de está comparación, existirán algunas ocasiones en las que sea posible determinar que un espacio métrico es de curvatura acotada superiormente por un valor real  $\kappa$ . La definición formal de los espacios métricos de curvatura acotada fue uno de los objetivos que Hadamard en un gran esfuerzo perseguía. Inclusive hoy en día, los espacios métricos de curvatura acotada y, en particular, los espacios  $CAT(\kappa)$  se consideran una generalización de las variedades riemannianas con curvatura seccional acotada.

**Definición 1.5.1.** sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\kappa$  un número real. Sea  $\Delta$  un triángulo geodésico en  $X$  con perímetro menor que  $2D_\kappa$ . Sea  $\bar{\Delta} \subset M_\kappa^2$  un triángulo de comparación para  $\bar{\Delta}$ . Entonces,  $\Delta$  se dice que satisface la desigualdad  $CAT(\kappa)$  si para todo  $x, y \in \Delta$ ,

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y}).$$

Si  $\kappa \leq 0$ , entonces es llamado espacio  $CAT(\kappa)$  (de manera breve  $X$  es  $CAT(\kappa)$ ) si  $X$  es un espacio geodésico cuyos triángulos geodésicos satisfacen la desigualdad  $CAT(\kappa)$ .

Si  $\kappa > 0$ , entonces  $X$  se llama espacio  $CAT(\kappa)$  si  $X$  es  $D_\kappa$ -geodésico y todos los triángulos geodésicos en  $X$  de perímetro menor que  $2D_\kappa$  satisfacen la desigualdad  $CAT(\kappa)$ . (En está definición admitimos la posibilidad de que la métrica de  $X$  tome valores infinitos. Y le

recordamos al lector que decir que  $X$  es  $D_\kappa$ -geodésico significa que todos los pares de puntos a una distancia menor que  $D_\kappa$  están unidos por una geodésica).

**Definición 1.5.2.** *Se dice que un espacio métrico  $X$  es de curvatura  $\leq \kappa$  si es localmente un espacio  $\text{CAT}(\kappa)$ , es decir, para cada  $x \in X$  existe  $r_x > 0$  tal que la bola  $B(x, r_x)$ , dotada de la métrica inducida, es un espacio  $\text{CAT}(\kappa)$ .*

Si  $X$  es de curvatura  $\leq 0$  entonces decimos que es de curvatura no positiva.

La definición anterior fue introducida por A.D. Alexandrov. Proporciona una buena noción de un límite superior de curvatura en un espacio métrico arbitrario. Los teoremas clásicos de comparación en geometría diferencial muestran que si una variedad de Riemann es suficientemente suave (por ejemplo, si es  $C^3$ ), entonces tiene curvatura  $\leq \kappa$  en este sentido, si y solo si todas sus curvaturas seccionales son  $\leq \kappa$ .

**Proposición 1.5.1** ([49], pág. 160). *Sea  $X$  un espacio  $\text{CAT}(\kappa)$ .*

1. *Hay una geodésica única que une cada par de puntos  $x, y \in X$  (siempre que  $d(x, y) < D_\kappa$  si  $\kappa > 0$ ). Además está geodésica varía continuamente con sus puntos extremos.*
2. *Toda geodésica local en  $X$  de longitud a lo sumo  $D_\kappa$  es una geodésica.*
3. *Las bolas en  $X$  de radio menor que  $D_\kappa/2$  son convexas. (i.e dos puntos cualesquiera en dicha bola están unidos por un segmento geodésico único y este segmento está contenido en la bola).*
4. *Las bolas en  $X$  de radio menor que  $D_\kappa$  son contráctiles.*
5. *(Los puntos medios aproximados están cerca de los puntos medios). Para todo  $\lambda < D_\kappa$  y  $\epsilon > 0$  entonces existe  $\delta = \delta(\kappa, \lambda, \epsilon)$  tal que si  $m$  es un punto medio de una geodésica  $[x, y] \subset X$  con  $d(x, y) \leq \lambda$  y si*

$$\max \{d(x, m'), d(y, m')\} \leq \frac{1}{2}d(x, y) + \delta$$

*entonces  $d(m, m') < \epsilon$ .*

La desigualdad  $\text{CAT}(\kappa)$  puede ser reformulada de un gran número de formas distintas, esto se debe a Alexandrov ver [49]. Ahora presentaremos cuatro de ellas. Cuando se trabaja en estos espacios usaremos indistintamente la definición 1.5.1 o cualquiera de las siguientes reformulaciones, dependiendo del contexto donde se este trabajando.



**Proposición 1.5.2** ([49], pág. 161). *Sea  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Sea  $X$  un espacio métrico que además es  $D_\kappa$ -geodésico. Las siguientes condiciones son equivalentes (cuando  $\kappa > 0$  asumimos que el perímetro de cada triángulo geodésico considerado es menor que  $2D_\kappa$ ):*

1.  $X$  es un espacio  $\text{CAT}(\kappa)$ .
2. *Dados un triángulo geodésico  $\Delta(p, q, r)$  en  $X$  y un punto  $x \in [p, q]$ , el punto de comparación  $\bar{x} \in [\bar{q}, \bar{r}] \subseteq \bar{\Delta}(p, q, r) \subseteq M_\kappa^2$  verifica la siguiente desigualdad*

$$d(p, x) \leq d(\bar{p}, \bar{x})$$

3. *Dados un triángulo geodésico  $\Delta(p, q, r)$  en  $X$  y un par de puntos  $x \in [p, q]$  y  $y \in [p, r]$  con  $x \neq p$  e  $y \neq q$ , los ángulos de comparación correspondientes a  $p$  en los triángulos de comparación  $\bar{\Delta}(p, q, r) \subseteq M_\kappa^2$  y  $\bar{\Delta}(p, x, y) \subseteq M_\kappa^2$  satisfacen:*

$$\angle_p^\kappa(x, y) \leq \angle_p^\kappa(q, r).$$

4. *El ángulo de Alexandrov (definición 1.4.12) entre los segmentos de cualquier triángulo geoesico en  $X$  con vértices distintos no es mayor que el ángulo entre los segmentos correspondientes de sus triángulos de comparación en  $M_\kappa^2$ .*
5. *Dado un triángulo geodésico  $\Delta(p, q, r)$  en  $X$  con  $p \neq q$  y  $p \neq r$ , si  $\gamma$  denota el ángulo de Alexandrov entre  $[p, q]$  y  $[p, r]$  en  $p$  y si  $\bar{\Delta}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \subseteq M_\kappa^2$  es un triángulo geodésico tal que  $d(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q)$ ,  $d(\bar{p}, \bar{r}) = d(p, r)$  y donde  $\angle_{\bar{p}}(\bar{q}, \bar{r}) = \gamma$ , entonces  $d(q, r) \geq d(\bar{q}, \bar{r})$ .*

## 1.6 Espacios Métricos $\text{CAT}(0)$

Introducimos ahora espacios  $\text{CAT}(0)$ , que son espacios geodésicos con curvatura no positiva en un sentido más fuerte que el de Busemann. Al igual que en la curvatura de Busemann, comparamos triángulos geodésicos de un espacio  $\text{CAT}(0)$  con triángulos en el plano euclidiano, pero se requiere una desigualdad más fuerte para mantenerse. Del mismo modo, también veremos que está condición geométrica se puede expresar analíticamente como convexidad de la función de distancia y que está condición de convexidad está cuantificada.

**Definición 1.6.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico geodésico. Es un espacio CAT(0) si para todo triángulo geodésico con vértices  $p, q, r \in X$  y  $x \in [p, r]$  y  $y \in [p, q]$  tenemos,  $d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$ , donde  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son respectivamente puntos de comparación en el triángulo de comparación  $\Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ .

El significado geométrico de esta definición se muestra en la Figura 1.2. Se puede ver en la definición misma que los espacios CAT(0) son de Busemann. En particular, son exclusivamente geodésicos. Si  $(X, d)$  es un espacio CAT(0), entonces cada triángulo geodésico con vértices  $p, q, r \in X$  y  $x \in [q, r]$  tenemos

$$d(p, x) \leq d(\bar{p}, \bar{x}), \quad (1.6.1)$$

donde  $\bar{x} \in \bar{\Delta}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ . Utilizando un simple cálculo elemental con el producto interno en el plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$ , tenemos una expresión equivalente a la condición (1.6.1) la cual es la siguiente

$$d(p, x_t)^2 \leq (1-t)d(p, q)^2 + td(p, r)^2 - t(1-t)d(q, r)^2, \quad (1.6.2)$$

donde  $x_t := (1-t)q + tr$  para todo  $t \in [0, 1]$ . La desigualdad (1.6.2) dice que la función de distancia en los espacios CAT(0) es al menos tan convexa como en el plano euclidiano.



Figura 1.2: Triángulo geodésico (derecha) y su triángulo de comparación (izquierda)

Finalmente observamos que si  $x, y_1, y_2$  son puntos de un espacio CAT(0) y si  $y_0$  es el punto medio del segmento  $[y_1, y_2]$ , entonces la desigualdad (1.6.2) implica,

$$d(x, y_0)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x, y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1, y_2)^2 \quad (1.6.3)$$

porque la igualdad se cumple en la métrica euclidiana. Es importante resaltar que un espacio métrico geodésico es un espacio CAT(0) si y solo si satisface la desigualdad (1.6.3)

(que se conoce como la desigualdad CN de Bruhat y Tits). Usando esta desigualdad es fácil ver que si  $X_1$  y  $X_2$  son espacios  $\text{CAT}(0)$ , entonces  $X_1 \times X_2$  también es un  $\text{CAT}(0)$ , donde la métrica en  $X_1 \times X_2$  está dada por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2))^2 = d(x_1, y_1)^2 + d(x_2, y_2)^2.$$

También si  $d(x, y_1) = d(x, y_2) = 1$  y  $d(y_1, y_2) \geq \varepsilon$ , entonces de (1.6.3) resulta

$$d(x, y_0) \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

y así se tiene el módulo de convexidad euclidiana habitual en espacios  $\text{CAT}(0)$ . En particular,  $d(x, y_1) \leq R$ ,  $d(x, y_2) \leq R$ , y  $d(y_1, y_2) \geq r$  implica

$$d(x, y_0) \leq \left(1 - \delta\left(\frac{r}{R}\right)\right) R,$$

donde,  $\delta(\varepsilon) := \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ .

**Definición 1.6.2.** *Un espacio métrico  $(X, d)$  tiene una curvatura  $\leq 0$  si es localmente un espacio  $\text{CAT}(0)$ . En este caso, se dice que  $X$  es de curvatura no positiva.*

**Observación 1.6.1.** *Tenga en cuenta que en la definición de un espacio  $\text{CAT}(\kappa)$  no requerimos que  $X$  esté completo. Los espacios métricos completos  $\text{CAT}(0)$  se denominan a menudo espacios Hadamard. Estos espacios son de especial relevancia para el desarrollo de este documento.*

**Teorema 1.6.1** (Teorema Cartan-Hadamard). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico conexo y completo.*

1. *Si la métrica en  $X$  es localmente convexa, entonces la métrica de longitud inducida en el espacio de cobertura universal  $\bar{X}$  es (globalmente) convexa. En particular, unívocamente geodésico y las geodésicas varían continuamente con sus extremos.*
2. *Si  $X$  es de curvatura  $\leq 0$  es un espacio  $\text{CAT}(0)$ .*

Este resultado es uno de los más fuertes sobre espacios con curvatura no-positiva, el cual nos da un principio para pasar de la geometría local de tal espacio a su geometría y topología globales. En particular este principio implica que un espacio de curvatura no-positiva es esférico pues su cobertura universal es contráctil y además este es geodésico aunque aquel no lo sea. Por otra parte, si un espacio de longitud completo simplemente conectado es localmente convexo y tiene una curvatura  $\leq 0$ , es un espacio  $\text{CAT}(0)$ .

## Ejemplos

- El espacio euclideo  $(\mathbb{R}, d_{Eucl})$  es un espacio CAT(0) . Tambien lo es cualquier espacio preHilbert.
- Una variedad Riemanniana completa  $\mathcal{M}$ , dotada de su función canónica de distancia, es un espacio CAT(0) si y sólo si  $\mathcal{M}$  no tiene curvatura seccional positiva.
- Espacios de Hilbert: los únicos espacios de Banach que son CAT(0).
- El espacio clásico hiperbólico  $\mathbb{H}^n$
- $\mathbb{R}$ -árboles; un espacio métrico  $T$  es un  $\mathbb{R}$ -árboles si
  - para  $x, y \in T$  existe una única geodésica  $[x, y]$
  - si  $[x, y] \cap [y, z] = \{y\}$ , entonces  $[x, z] = [x, y] \cup [y, z]$

**Proposición 1.6.2.** *Si  $X$  es un espacio CAT(0) , entonces la función de distancia  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa.*

Esto significa que dado cualquier par de geodésicas  $c : [0, 1] \rightarrow X$  y  $c' : [0, 1] \rightarrow X$  parametrizadas proporcionalmente a la longitud del arco, la siguiente desigualdad es válida para todo  $t \in [0, 1]$ :

$$d(c(t), c'(t)) \leq (1 - t) d(c(0), c'(0)) + t d(c(1), c'(1)).$$

### Ejemplo (La función distancia)

Sea la función

$$x \rightarrow d(x, x_0) \quad x \in X,$$

donde  $x_0$  es un punto fijo de  $X$ , es convexo y continuo. el cuadrado de esta función es incluso estrictamente convexo. De manera más general, la función de distancia  $d_C$  a un subconjunto cerrado convexo  $C \subset X$ , definido como

$$d_C = \inf_{c \in C} d(x, c), \quad x \in X,$$

es convexa y 1-Lipschitziana [[49], Proposición 2.4]

### Ejemplo (Función de desplazamiento)

Sea  $T : X \rightarrow X$  una isometría. La función de desplazamiento de  $T$  es la función  $\delta_T : X \rightarrow [0, \infty]$  definida por

$$\delta_T(x) = d(x, Tx),$$

para todo  $x \in X$ . Esto es convexo y Lipschitziana [[49], Definición II,6.1].

### Ejemplo (Funciones de Busemann)

Sea  $c : [0, \infty) \rightarrow X$  un segmento geodésico. La función  $b_c : X \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$b_c(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} [d(x, c(t) - t)], \quad x \in X,$$

es llamada la función Busemann asociada al segmento  $c$ . [[49], Definición II,8.7]. Otro ejemplo explícito de una función de Busemann en el espacio CAT(0) de matrices  $n \times n$  definidas de manera positiva con entradas reales, se puede encontrar en [[49], proposición 10.69]

**Proposición 1.6.3.** *Sea  $X$  un espacio CAT(0) y sea  $C$  un subconjunto convexo de  $X$  el cual resulta completo con la métrica inducida. Entonces:*

1. *Para todo  $x \in X$  existe un punto único  $\pi(x) \in C$  tal que*

$$d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y);$$

2. *si  $x'$  pertenece al segmento geodésico  $[x, \pi(x)]$ , entonces  $\pi(x') = \pi(x)$ ;*

3. *dado  $x \notin C$  y  $y \in C$ , si  $y \neq \pi(x)$  entonces  $\angle_{\pi(x)}(x, y) \geq \frac{\pi}{2}$ ;*

4. *la función  $\pi : X \rightarrow C$  es una retracción que no aumenta distancias. Para cada  $x$  en  $X$ , sea  $c : [0, d(x, C)] \rightarrow X$  es la geodésica que va de  $x$  hasta  $\pi(x)$ . La homotopía  $H : (x, t) \in X \times I \rightarrow c_x(td(x, C)) \in X$  es una homotopía de la identidad  $id_X$  de  $X$  en la retracción  $\pi$*

**Corolario 1.6.4.** *Sea  $X$  un espacio CAT(0), y sea  $C$  un subconjunto convexo el cual resulta completo con la métrica inducida. Denotemos por  $d_C$  a la función distancia a  $C$  definida sobre  $X$ .*

1.  *$d_c$  es convexa y no aumenta;*

2. para todo  $x, y \in X$ , se tiene  $|d_C(x) - d_C(y)| \leq d(x, y)$ ;
3. si  $x$  está en  $X \setminus C$  y  $r$  es un número en  $(0, d(x, C))$  entonces la restricción de  $d_C$  a la esfera de centro  $x$  y radio  $r$  alcanza su mínimo en un único punto  $z$ , el cual además cumple que  $d_C(x) - d_C(z) = r$ .

A continuación recopilamos algunos datos elementales sobre los espacios CAT(0). Para ver a detalle estos lemas que enunciamos en seguida, consulte [62]

**Lema 1.6.5.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico CAT(0). Entonces:*

- (i)  $(X, d)$  es unívocamente geodésico.
- (ii) Sea  $p, x, y$  puntos en  $X$ , sea  $\alpha \in [0, 1]$ , y sea  $m_1$  y  $m_2$ , que denotan respectivamente, los de  $[p, x]$  y  $[p, y]$  satisfacen

$$d(p, m_1) = \alpha d(p, x) \quad y \quad d(p, m_2) = \alpha d(p, y).$$

Entonces,

$$d(m_1, m_2) \leq \alpha d(x, y).$$

- (iii) Sea  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  y  $z, w \in [x, y]$  tal que  $d(x, z) = d(x, w)$ . Entonces  $z = w$ .

- (iv) Sea  $x, y \in X$ . Para cada  $t \in [0, 1]$ , entonces existe un único punto  $z \in [x, y]$  tal que

$$d(x, z) = td(x, y) \quad y \quad d(y, z) = (1 - t)d(x, y). \quad (1.6.4)$$

Por conveniencia, de ahora en adelante, usaremos la notación  $(1 - t) \oplus ty$  para el único punto  $z$  que satisface (1.6.4).

**Observación 1.6.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico CAT(0) y sea  $x, y \in X$  tal que  $x \neq y$ . Entonces*

$$(1 - t)x \oplus ty = (1 - s)x \oplus sy \quad \text{si y solo si} \quad s = t.$$

**Lema 1.6.6.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico CAT(0) y sea  $x, y \in X$  tal que  $x \neq y$ . Entonces*

- (i)  $[x, y] = \{(1 - t)x \oplus ty | t \in [0, 1]\}$ .
- (ii)  $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$  si y solo si  $z \in [x, y]$ .
- (iii) La aplicación  $f : [0, 1] \rightarrow [x, y]$ ,  $f(t) = (1 - t)x \oplus ty$  es continua y biyectiva.

**Lema 1.6.7.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico CAT(0). Entonces para todo  $x, y, z \in X$  y  $t \in [0, 1]$ ,*

$$(i) \quad d((1-t)x \oplus ty, z) \leq (1-t)d(x, z) + td(y, z),$$

$$(ii) \quad d^2((1-t)x \oplus y, z) \leq (1-t)d^2(x, z) + td^2(y, z) - t(1-t)d^2(x, y).$$

Sea  $x_i \in X$  y  $\lambda_i \in [0, 1]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Siguiendo la definición de único punto  $(1-\alpha)x \oplus \alpha y$  en un segmento geodésico  $[x, y]$ , se contruye las siguientes notaciones  $\bigoplus_{i=1}^2 \lambda_i x_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 \oplus \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2$ . Por inducción tenemos,

$$\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i x_i = (1 - \lambda_n) \left( \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_n} x_1 \oplus \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_n} x_2 \oplus \dots \oplus \frac{\lambda_{n-1}}{1 - \lambda_n} x_{n-1} \right) \oplus \lambda_n x_n.$$

A partir del lema 1.6.7, se puede escribir lo siguiente:

**Lema 1.6.8** ([28]). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico CAT(0) con  $x, x_i \in X$  y  $\lambda_i \in [0, 1]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . entonces*

$$(i) \quad d\left(\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i x_i, x\right) \leq \sum_{i=1}^n d(x_i, x);$$

$$(ii) \quad d\left(\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i x_i, x\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i d^2(x_i, x) - \lambda_i \lambda_j d^2(x_i, x_j) \text{ para } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

De las proposiciones y definiciones anteriormente dadas; observamos que los espacios CAT(0) comparten muchas propiedades de los espacios de Banach uniformemente convexos. Por ejemplo, los conjuntos convexos cerrados son únicamente proximales, las sucesiones descendentes de conjuntos cerrados y convexos no vacíos tienen una intersección no vacía, y se aplican técnicas de “centro asintótico”. Además los espacios CAT(0) también disfrutan de ciertas propiedades de los espacios de Hilbert por ejemplo, las proyecciones de puntos más cercanos sobre conjuntos cerrados y convexos no son expansivas y existe una noción de ángulo para la que se aplica una ley de cosenos. Además, la familia de todos los subconjuntos convexos cerrados acotados de un espacio CAT(0) dado es normal en el sentido descrito en [86] y de allí el siguiente teorema,

**Teorema 1.6.9.** *Suponga que  $K$  es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio completo CAT(0) y suponga  $f : K \rightarrow K$  es no expansiva. Entonces el conjunto de puntos fijos de  $f$  es no vacío, cerrado y convexo.*

**Corolario 1.6.10.** *Sea  $K$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio  $X$  completo  $\text{CAT}(0)$ . Suponga  $f : K \rightarrow X$  es un operador no expansivo para el cual*

$$\inf \{d(x, f(x)) : x \in K\} = 0.$$

*Entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $K$ .*

Antes de finalizar esta sección queremos resaltar que la referencia fundamental donde se puede encontrar las respectivas demostraciones de las proposiciones aquí escritas y que le servirá al lector si así lo desea profundizar de manera más estricta acerca de los espacios de curvatura acotada es el magnífico libro de M.R. Bridson y A. Haefliger [49]. Finalmente, cabe resaltar que cualquier resultado que sea verdadero para espacios  $\text{CAT}(0)$  es automáticamente válido también para espacios  $\text{CAT}(\kappa)$  con  $\kappa < 0$ . Resaltamos esto, debido a que la gran mayoría de resultados que se conocen en la literatura en el contexto de espacios  $\text{CAT}(\kappa)$  están formulados únicamente para espacios  $\text{CAT}(0)$ .

## 1.7 Espacios Métricos $\text{CAT}_p(0)$

En la definición de un espacio métrico  $\text{CAT}(0)$ , el triángulo de comparación es un subconjunto del espacio vectorial euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . M. A. Khamsi y S.A Shukri [47] plantearon la hipótesis acerca qué tipo de estructura y que tipo de propiedades se pueden obtener si se permite que los triángulos de comparación pertenezcan a algún espacio vectorial normado  $\mathbb{V}$ .

**Definición 1.7.1.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico geodésico. Se dice que  $X$  es un espacio  $\text{CAT}_p(0)$ , para  $p > 2$ , si para cualquier triángulo geodésico  $\Delta$  en  $X$ , existe un triángulo de comparación  $\bar{\Delta}$  en  $\ell_p$ , tal que satisface el axioma de comparación, es decir, para todo  $x, y \in \Delta$  y todos los puntos de comparación  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$ , tenemos*

$$d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

Es obvio que  $\ell_p$ , para  $p > 2$ , es un espacio  $\text{CAT}_p(0)$ . Se puede intuir que un ejemplo no lineal lo dará la bola unitaria abierta de  $\ell_p$  dotada de la distancia de Kobayashi [74]. A continuación, enunciaremos algunas de las propiedades de los espacios métricos  $\text{CAT}_p(0)$ .

**Teorema 1.7.1** ([47]). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico  $\text{CAT}_p(0)$ , con  $p \geq 2$ . Entonces para cualquier  $x, y_1, y_2 \in X$ , se tiene*

$$d^p \left( x, \frac{y_1 \oplus y_2}{2} \right) \leq \frac{1}{2}d^p(x, y_1) + \frac{1}{2}d^p(x, y_2) - \frac{1}{2^p}d^p(y_1, y_2), \quad (1.7.1)$$



a la cual se llama la desigualdad  $(CN_p)$ .

**Demostración.** Sea  $x, y_1, y_2 \in X$  y sea  $\triangle$  el triángulo geodésico asociado en  $X$ . Dado que  $X$  es un espacio métrico  $CAT_p(0)$ , existe un triángulo geodésico de comparación  $\bar{\triangle}$  en  $\ell_p$ , con  $p \geq 2$ . Los puntos de comparación asociados en  $\ell_p$  los cuales denotamos como  $\bar{x}, \bar{y}_1$  y  $\bar{y}_2$ . Por el axioma de comparación tenemos

$$d\left(x, \frac{y_1 \oplus y_2}{2}\right) \leq \left\| \bar{x} - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \right\|,$$

lo que implica

$$d\left(x, \frac{y_1 \oplus y_2}{2}\right)^p \leq \left\| \bar{x} - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \right\|^p.$$

Ahora recordando lo que se conoce como la desigualdad de Clarkson [29] en  $\ell_p$ :

$$\|x + y\|^p + \|x - y\|^p \leq 2^{p-1} (\|x\|^p + \|y\|^p),$$

para cualquier  $x, y$  en  $\ell_p$ , para  $p \geq 2$ . Aplicando está desigualdad para  $a = \frac{\bar{x} - \bar{y}_1}{2}$  y  $b = \frac{\bar{x} - \bar{y}_2}{2}$ , tenemos:

$$\left\| \frac{\bar{x} - \bar{y}_1}{2} + \frac{\bar{x} - \bar{y}_2}{2} \right\|^p + \left\| \frac{\bar{x} - \bar{y}_1}{2} - \frac{\bar{x} - \bar{y}_2}{2} \right\|^p \leq 2^{p-1} \left( \left\| \frac{\bar{x} - \bar{y}_1}{2} \right\|^p + \left\| \frac{\bar{x} - \bar{y}_2}{2} \right\|^p \right),$$

ó

$$\left\| \bar{x} - \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2} \right\|^p \leq \frac{1}{2} \|\bar{x} - \bar{y}_1\|^p + \frac{1}{2} \|\bar{x} - \bar{y}_2\|^p - \frac{1}{2^p} \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|^p.$$

Puesto que  $\|\bar{x} - \bar{y}_j\| = d(x, y_j)$ , para  $j \in \{1, 2\}$ , se obtiene

$$d^p\left(x, \frac{y_1 \oplus y_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} d^p(x, y_1) + \frac{1}{2} d^p(x, y_2) - \frac{1}{2^p} d^p(y_1, y_2).$$

□

Note que si  $p = 2$ , entonces la desigualdad  $(CN_p)$  coincide con la clásica desigualdad  $(CN)$ . Una consecuencia directa de la desigualdad  $(CN_p)$  es el siguiente resultado:

**Teorema 1.7.2** ([47]). *Cualquier espacio métrico  $CAT_p(0)$ , con  $p \geq 2$ , es uniformemente convexo. Además tenemos*

$$\delta(r, \varepsilon) \geq 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p},$$

para todo  $r > 0$  y para cada  $\varepsilon > 0$ .

Los espacios de Banach  $\ell_p$ ,  $p > 1$ , no sólo son uniformemente convexos sino que tienen una propiedad geométrica conocida como  $p$ -uniformemente convexo. El teorema (1.7.2) implica que los espacios métricos  $\text{CAT}_p(0)$  también son  $p$ -uniformemente convexo. Naor y Silberman [3] ampliaron el concepto de  $p$ -uniformemente convexo al entorno de los espacios geodésicos de la siguiente manera.

**Definición 1.7.2.** *Fijando  $1 < p < \infty$ . Un espacio métrico  $(X, d)$  es llamado  $p$ -uniformemente convexo con parametros  $c > 0$  si y solo si  $(X, d)$  es un espacio geodésicos y para tres puntos cualesquiera  $x, y, z \in X$  y para todo  $t \in [0, 1]$ ,*

$$d^p((1-t)x \oplus ty, z) \leq (1-t) d^p(x, z) + t d^p(y, z) - \frac{c}{2} t(1-t) d^p(x, y). \quad (1.7.2)$$

Note que la desigualdad (1.7.2) garantiza que el espacio  $X$  es unívocamente geodésico. (ver [68]) demostración para el caso  $p = 2$ ). Además, cualquier subconjunto convexo cerrado de un espacio  $p$ -uniformemente convexo es nuevamente un espacio  $p$ -uniformemente convexo con el mismo parámetro. Es fácil ver que en un espacio  $p$ -uniformemente convexo completo, cualquier sucesión acotada tiene una subsucesión  $\Delta$ -convergente.

A continuación enunciamos algunos resultados conocidos sobre  $\ell_p$ , para  $p \geq 2$ . El siguiente Lema técnico fue descubierto inicialmente por Lim [72] (ver también [95]):

**Lema 1.7.3** ([72]). *Sea  $\gamma, \beta \in [0, 1]$  tales que  $\gamma + \beta = 1$ . Para cualquier  $x, y \in \ell_p$ , tenemos*

$$\|\gamma x + \beta y\|^p + g(\gamma) \|x - y\|^p \leq \gamma \|x\|^p + \beta \|y\|^p,$$

donde

$$g(\gamma) = \gamma \beta \frac{1 + [x(\gamma \wedge \beta)]^{p-1}}{[1 + x(\gamma \wedge \beta)]^{p-1}},$$

donde  $x(\gamma)$ , para  $\gamma \in [0, 1/2]$  es la solución única para

$$(1-\gamma)x^{p-1} - \gamma - ((1-\gamma)x - \gamma)^{p-1} = 0, \quad x \in \left[ \frac{\gamma}{1-\gamma}, 1 \right].$$

En particular, tenemos

$$g(\gamma) \geq \gamma \beta \frac{1}{2^{p-1}},$$

lo que implica

$$\|\gamma x + \beta y\|^p + \frac{\gamma \beta}{2^{p-1}} \|x - y\|^p \leq \gamma \|x\|^p + \beta \|y\|^p.$$

Utilizando el Lemma 1.7.3, obtenemos el siguiente resultado indispensable para los objetivos principales de esta sección:

**Lema 1.7.4.** Sea  $X$  un espacio métrico  $\text{CAT}_p(0)$ , con  $p \geq 2$ ,  $x, x_i \in X$  y  $t_i \in [0, 1]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n \geq 2$ ) tal que  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ . Entonces

$$(i) \quad d\left(\bigoplus_{i=1}^n t_i x_i, x\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i d(x_i, x);$$

$$(ii) \quad d^p\left(\bigoplus_{i=1}^n t_i x_i, x\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i d^p(x_i, x) - \frac{1}{2^{p-1}} t_i t_j d^p(x_i, x_j) \text{ para } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Demostración.** (i) es evidente. Para (ii) Demostraremos a partir de la inducción sobre  $n$ . Para  $n = 2$ , sea  $x_1, x_2, x_3 \in X$ ,  $x = x_3$ . Considere el triángulo de comparación  $\bar{\Delta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  en  $\ell_p$  tal que  $d(x_i, x_j) = \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|_p$ , para  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} d^p\left((1-t)x_1 \oplus t x_2, x_3\right) &\leq \|(1-t)\bar{x}_1 + t \bar{x}_2 - \bar{x}_3\|^p \\ &= \|(1-t)(\bar{x}_1 - \bar{x}_3) + t(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)\|^p \\ &\leq (1-t) \|\bar{x}_1 - \bar{x}_3\|^p + t \|\bar{x}_2 - \bar{x}_3\|^p - \frac{t(1-t)}{2^{p-1}} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|^p \\ &= (1-t) d^p(x_1, x_3) + t d^p(x_2, x_3) - \frac{t(1-t)}{2^{p-1}} d^p(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Inductivamente, suponga que el resultado es válido para  $n = k - 1$ , i.e.,

$$d^p\left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} t_i x_i, x\right) \leq \sum_{i=1}^{k-1} t_i d^p(x_i, x) - \frac{1}{2^{p-1}} t_i t_j d^p(x_i, x_j),$$

para  $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ , donde  $\sum_{i=1}^{k-1} t_i = 1$ . Ahora eligimos  $\{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset [0, 1]$  con  $t_k \neq 0$  tal que  $\sum_{i=1}^k t_i = 1$ . Seleccione  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  s.t  $i \neq k \neq j$  (Nosotros podemos cambiar la posición de  $t_i$ ). Por (1.7.3),

$$\begin{aligned} d^p\left(\bigoplus_{i=1}^k t_i x_i, x\right) &= d^p\left((1-t_k)\left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} \frac{t_i}{1-t_k} x_i\right) \oplus t_k x_k, x\right) \\ &\leq (1-t_k) d^p\left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} \frac{t_i}{1-t_k} x_i, x\right) + t_k d^p(x_k, x) \\ &\leq (1-t_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{t_i}{1-t_k} d^p(x_i, x) + t_k d^p(x_k, x) - \frac{1-t_k}{2^{p-1}} t_i t_j d^p(x_i, x_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \frac{t_i}{1-t_k} d^p(x_i, x) - \frac{t_i t_j}{2^{p-1}} d^p(x_i, x_j), \end{aligned}$$

$i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ . □

**Observación 1.7.1.** Desde el Lema 1.7.4, si  $p \geq 2$ , la desigualdad (1.7.2) la cual satisface por  $c = 1$ . Por lo tanto, cualquier espacio métrico  $\text{CAT}_p(0)$  es  $p$ -uniformemente convexo.

## 1.8 Espacios Métricos Hiperbólicos

En esta sección, presentamos los espacios hiperbólicos, definidos por Reich y Shafrir [69] como un contexto apropiado para el estudio de la teoría de operadores en general, y de procesos iterativos para aplicaciones no expansivas en particular. Esta clase de espacios métricos incluye todos los espacios lineales normados y variedades de Hadamard, así como la bola de Hilbert equipada con la métrica hiperbólica y los productos cartesianos de las bolas de Hilbert. Se puede encontrar amplia información sobre espacios hiperbólicos y un tratamiento detallado de ejemplos como la bola de Hilbert en [34]. Una clase aún más general de espacios métricos es la clase de espacios de tipo hiperbólico [88], que están contenidos en la clase de espacios métricos convexos [89]. En particular, todo espacio hiperbólico es un espacio de tipo hiperbólico. A continuación, recopilamos algunos conceptos básicos sobre los espacios hiperbólicos que necesitaremos más adelante incluimos las demostraciones (breves) las cuales son tomadas de [77].

Sea  $(\mathcal{M}, d)$  un espacio métrico y sea  $\mathbb{R}$  la línea real. Decimos que un operador  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  es una incorporación métrica de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{M}$  si

$$d(c(s), c(t)) = |s - t|$$

para todo real  $s$  y  $t$ . La imagen de  $\mathbb{R}$  bajo la incorporación métrica se denomina *línea métrica*. Cualquier isometría  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  es una incorporación métrica y la línea métrica asociada es  $X$ . De hecho, una incorporación métrica es una isometría si y sólo si es sobreyectiva. La imagen  $c([a, b]) \subseteq \mathcal{M}$  de un intervalo real bajo una incorporación métrica  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  se llamará segmento métrico.

Sea  $x, y \in X$  y sea  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  una incorporación métrica. Decimos que la línea métrica  $c(\mathbb{R})$  pasa por  $x$  y  $y$  si  $x, y \in c(\mathbb{R})$  y que el segmento métrico  $c([a, b])$  une  $x$  y  $y$  si  $(c(a) = x$  y  $c(b) = y)$  ó  $(c(a) = y$  y  $c(b) = x)$ .

Asumimos que  $(\mathcal{M}, d)$  contiene una familia  $\mathcal{F}$  no vacía de líneas métricas tal que para cada par de puntos distintos  $x, y \in \mathcal{M}$ , hay una línea métrica única que pasa por  $x$  y  $y$ . Por lo tanto, hay una familia no vacía  $\{c_i\}_{i \in I}$  de incorporaciones métricas tal que para todo  $x \neq y \in \mathcal{M}$  hay un  $i \in I$  único tal que  $x, y \in c_i(\mathbb{R})$ .

**Observación 1.8.1.** Dado que  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ , hay al menos una incorporación métrica  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ . Como  $c$  es inyectiva, se deduce que  $\text{card}(\mathcal{M}) \geq \text{card}(\mathbb{R}) = \mathcal{N}_1$

Los siguientes lemas recopilan algunos hechos simples. En aras de una mejor comprensión se demuestran algunos, aclarando que las demostraciones son tomadas en [77].

**Lema 1.8.1.** *Para cualquier  $x \in \mathcal{M}$ , hay al menos una línea métrica de  $\mathcal{F}$  que pasa hasta  $x$ .*

**Demostración.** Según la observación anterior,  $\mathcal{M}$  es infinito, por lo que hay  $y \in \mathcal{M}$ ,  $y \neq x$ . Tomemos ahora la única línea métrica que pasa por  $x$  y  $y$ .  $\square$

**Lema 1.8.2.** *Para cualquier punto distinto  $x, y \in \mathcal{M}$ , hay un segmento métrico único uniéndose a ellos.*

**Demostración.** Existe un  $i \in I$  único tal que  $x, y \in c_i(\mathbb{R})$ . Dado que  $c_i$  es inyectivo, existen unos puntos únicos  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ , tales que  $c_i(a) = x$  y  $c_i(b) = y$ . Por lo tanto, el segmento métrico único que une  $x$  y  $y$  es  $c_i([a, b])$  si  $a < b$  ó  $c_i([b, a])$  si  $b < a$ .  $\square$

Denotamos por  $[x, y]$  ó  $[y, x]$  el segmento métrico único que une dos puntos distintos  $x$  y  $y$  desde  $\mathcal{M}$ .

Para cualquier  $x \in \mathcal{M}$ , por  $[x, x]$ , entendemos el singleton  $\{x\}$ . Según el Lema 1.8.1, existe  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  y  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $c(a) = x$ , por lo tanto  $\{x\} = c([a, a])$ . Entonces,  $[x, x]$  es un segmento métrico degenerado.

**Lema 1.8.3.** *Sea  $x, y \in \mathcal{M}$ ,  $x \neq y$ ,  $z, w \in [x, y]$ . Entonces*

1.  $0 \leq d(x, z) \leq d(x, y)$ ;
2. si  $d(x, z) = d(x, w)$ , entonces  $z = w$ .

**Demostración.** Sea  $[x, y] = c([a, b])$ .

1. Sea  $s \in [a, b]$  tal que  $c(s) = z$ . Si  $c(a) = x$  y  $c(b) = y$ , entonces  $d(x, z) = d(c(a), c(s)) = |s - a| = s - a \leq b - a = d(x, y)$ . Si  $c(a) = y$  y  $c(b) = x$ , entonces  $d(x, z) = d(c(b), c(s)) = |b - s| = b - s \leq b - a = d(x, y)$ .

2. Ya que  $z, w \in [x, y]$ , existen  $s_1, s_2 \in [a, b]$  tal que  $c(s_1) = z$  y  $c(s_2) = w$ . Suponga que  $c(a) = x$  y  $c(b) = y$ . Se sigue que  $d(x, z) = d(c(a), c(s_1)) = |a - s_1| = s_1 - a$ , y de manera similar,  $d(x, w) = s_2 - a$ . Por lo tanto,  $d(x, z) = d(x, w)$ , si y sólo si  $s_1 - a = s_2 - a$  si y sólo si  $s_1 = s_2$  si y sólo si  $z = w$ .  $\square$

**Lema 1.8.4.** Sea  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  una incorporación métrica,  $a \leq b$ , y  $t \in [0, 1]$ . Entonces

$$\begin{aligned} d(c(a), c((1-t)a + bt)) &= td(c(a), c(b)) \\ d(c(a), c((1-t)a + bt)) &= (1-t)d(c(a), c(b)). \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

**Demostración.** Se sigue desde  $d(c(a), c((1-t)a + bt)) = |a - ((1-t)a + bt)| = t|a - b| = td(1-t)d(c(a), c(b))$  y de manera similar  $d(c(b), c((1-t)a + bt)) = |b - ((1-t)a + bt)| = t|a - b| = td(1-t)d(c(a), c(b))$ .  $\square$

**Proposición 1.8.5.** Sea  $x, y \in \mathcal{M}$ . Para cada  $t \in [0, 1]$ , existe un único punto  $z \in [x, y]$  tal que

$$d(x, z) = td(x, y), \quad d(y, z) = (1-t)d(x, y). \tag{1.8.2}$$

**Demostración.** Si  $x = y$ , claramente es obvio,  $z = x = y$ . Suponga que  $x \neq y$ . Sea  $[x, y] = c([a, d])$ . Si  $c(a) = x$  y  $c(b) = y$ , entonces tome  $z = c((1-t)a + tb)$ . Entonces,  $z \in [x, y]$  y  $z$  satisface (1.8.2) por el Lema 1.8.4. La unicidad de  $z$  se sigue desde el Lema 1.8.3 (2).  $\square$

El único punto que satisface (1.8.2) se denota de manera similar que en los espacios CAT(0), de la siguiente manera  $(1-t)x \oplus ty$ . Entonces, para cualquier  $x \in X$  y  $t \in [0, 1]$ ,  $(1-t)x \oplus tx = x$ .

Si  $z \in [x, y]$  satisface solo una de las condiciones (1.8.2), Entonces es necesario que  $z = (1-t)x \oplus ty$ . Por tanto, cualquier punto del segmento  $[x, y]$  que satisfaga una de las condiciones (1.8.2) satisface también la otra.

**Observación 1.8.2.** Sea  $x, y \in \mathcal{M}$ ,  $x \neq y$  y  $s, t \in [0, 1]$ . Entonces,

1.  $(1-t)x \oplus ty = (1-s)x \oplus sy$  si y sólo si  $s = t$ ;
2.  $(1-t)x \oplus ty = ty \oplus (1-t)x$ .

**Lema 1.8.6.** Sea  $x, y \in \mathcal{M}$ ,  $x \neq y$ . Entonces,

1.  $[x, y] = \{(1-t)x \oplus ty | t \in [0, 1]\}$ ;
2. La función  $f : [0, 1] \rightarrow [x, y]$ ,  $f(t) = (1-t)x \oplus ty$  es continua y biyectiva;
3.  $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$  para todo  $z \in [x, y]$ ;

4. si  $z \neq w \in X$  tales que  $d(x, y) \leq d(z, w)$ , entonces existe un único  $v \in [z, w]$  tal que  $d(z, v) = d(x, y)$ .

**Demostración.** 1) La inclusión  $\supseteq$  sigue por definición. Para la inclusión inversa  $\subseteq$ , sea  $z \in [x, y]$  y  $t = d(x, z)/d(x, y)$ . Entonces por el Lema 1.8.3(1),  $t \in [0, 1]$  y  $d(x, z) = td(x, y)$ . Resulta que  $z = (1 - t)x \oplus ty$ . 2) Aplicando 1) y observación 1.8.2(1), de manera inmediata se tiene que  $f$  está bien definida y es biyectiva. Sea  $c([a, b]) = [x, y]$ . Entonces para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $f(t) = c((1 - t)a + tb)$ . Ya que  $c$  es continua y la función  $[0, 1] \rightarrow [a, b], t \rightarrow (1 - t)a + tb$  también es continua, se deduce que  $f$  es continua. 3) Sea  $z \in [x, y]$ . Por 1), existe  $t \in [0, 1]$  tal que  $z = (1 - t)x \oplus ty$ , por lo tanto  $d(x, z) + d(z, y) = td(x, y) + (1 - t)d(x, y) = d(x, y)$ . 4) Sea  $t = d(x, y)/d(z, w)$ , así que  $t \in [0, 1]$ . Sea  $v = (1 - t)z \oplus tw$ . Entonces  $v \in [z, w]$  y  $d(z, v) = td(z, w) = d(x, y)$ .

□

**Definición 1.8.1** ([69]). Una triple  $(\mathcal{M}, d, \mathcal{F})$  es un espacio hiperbólico si

$$d\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}z\right) \leq \frac{1}{2}d(y, z) \quad (1.8.3)$$

para todo  $x, y, z \in \mathcal{M}$ .

Un requerimiento equivalente es que

$$d\left(\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}w \oplus \frac{1}{2}z\right) \leq \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, z)) \quad (1.8.4)$$

para todo  $x, y, z$  y  $w$  en  $\mathcal{M}$ .

## Ejemplos

1. Todos los espacio lineales normados son hiperbólicos.
2. Todas las variedades de Hadamard, es decir todas las variedades riemannianas de curvatura no positiva conexas de dimensión finita o simplemente completas y conexas.
3. La Bola de Hilbert equipada con la métrica hiperbólica es el clásico ejemplo de dimensión infinita. (ver [34])

## Ejemplo

Para cada  $1 \leq i \leq n$ , sea  $(\mathcal{M}_i, d_i, \mathcal{F}_i)$  un espacio hiperbólico, y sea  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$  con la siguiente propiedad:  $\|r\| \leq \|s\|$  para todo  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  y  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $0 \leq r_i \leq s_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Defina una métrica  $d$  en el producto cartesiano  $\mathcal{M} = \prod_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ , por

$$d(x, y) = \|(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n))\|,$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  son dos puntos cualesquiera en  $X$ . Ahora suponga que para  $1 \leq i \leq n$ , la familia  $\mathcal{F}_i$  de líneas métricas las cuales consisten en las imagenes de la incorporación métrica  $\{c_{i,\alpha}(t) : \alpha \in A\}$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de líneas métricas determinadas por todas las incorporaciones métricas  $c : \mathbb{R} \rightarrow X$  de la forma

$$c(t) = (c_{1,\alpha_1}(p_1 + q_1 t), c_{2,\alpha_2}(p_2 + q_2 t), \dots, c_{n,\alpha_n}(p_n + q_n t)),$$

donde  $\alpha_i \in A_i$ ,  $p_i \in B_i$ , y  $\|(q_1, q_2, \dots, q_n)\| = 1$ . Entonces  $(\mathcal{M}, d, \mathcal{F})$  también es un espacio hiperbólico. Cuando cada  $\mathcal{M}_i = B_i$ , la bola de Hilbert, y  $\|(r_1, r_2, \dots, r_n)\| = \max\{|r_i| : 1 \leq i \leq n\}$ , entonces el espacio  $\mathcal{M}$  es igual a  $B^n$ , el producto cartesiano de  $n$  bolas de Hilbert, equipados con está métrica Hiperbólica.

## Ejemplo

Se puede realizar una construcción similar para un producto contable de espacios hiperbólicos. Elegiendo una norma "monótona"  $\|\cdot\|$  en un subespacio  $S$  de  $\mathbb{R}^\infty$  y un punto fijo  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  en  $\mathcal{M} = \prod_{i=1}^\infty$ , define la métrica  $d$  en

$$Y = \{x \in \mathcal{M} : \{d_i(x_i, a_i) : i = 1, 2, \dots\} \in S\}$$

por

$$d(x, y) = \|(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \dots, d_n(x_n, y_n))\|.$$

De hecho, está construcción puede extenderse a un producto arbitrario de espacios hiperbólicos.

Sea  $(\mathcal{M}, d, \mathcal{F})$  un espacio hiperbólico y sea  $C$  un subconjunto  $C \subseteq \mathcal{M}$  convexo si  $[x, y] \in C$  para todo  $x, y \in C$ . Denote por  $d(C)$  el diámetro de  $C$ , por lo tanto



$$d(C) = \sup \{d(x, y) | x, y \in C\}.$$

El conjunto  $C$  es cerrado si  $d(C) < \infty$ . Una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  es acotado si el conjunto  $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$  es acotado.

**Lema 1.8.7.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, \mathcal{F})$  un espacio hiperbólico. Entonces,*

$$d((1-t)x \oplus tz, y) \leq (1-t)d(x, y) + td(z, y).$$

Presentamos ahora el concepto relacionado de espacio métrico de tipo hiperbólico. Sea  $(\mathcal{M}, d)$  un espacio métrico y  $S$  una familia de segmentos métricos. Si se satisface lo siguiente:

- (i) para cada dos puntos  $x, y \in \mathcal{M}$ , hay un segmento métrico único de  $S$  que los une, denotado como  $[x, y]$ ;
- (ii) si  $p, x, y, m \in \mathcal{M}$  y si  $m \in [x, y]$  satisface  $d(x, m) = td(x, y)$  para  $t \in [0, 1]$ , entonces

$$d(p, m) \leq (1-t)d(p, x) + td(p, y).$$

**Proposición 1.8.8.** *Cualquier espacio hiperbólico es de tipo hiperbólico.*

A continuación enunciamos la definición de espacios métricos hiperbólicos, dada por Kohlenbahe [78], la cual resume en cierta medida lo dicho en esta sección referente a los espacios hiperbólicos.

**Definición 1.8.2.** *Una triple  $(\mathcal{M}, d, W)$  es llamado espacio métrico hiperbólico si  $(\mathcal{M}, d)$  es un espacio métrico y  $W : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  es una función que satisface las siguientes condiciones: para todo  $u, v, z, w \in \mathcal{M}$  y  $\beta, \gamma \in [0, 1]$ ,*

$$(H1) \quad d(z, W(u, v, \beta)) \leq (1-\beta)d(z, u) + \beta d(z, v);$$

$$(H2) \quad d(W(u, v, \beta), W(u, v, \gamma)) = |\beta - \gamma|d(u, v);$$

$$(H3) \quad W(u, v, \beta) = W(v, u, 1 - \beta);$$

$$(H4) \quad d(W(u, z, \beta), W(v, w, \beta)) \leq (1-\beta)d(u, v) + \beta d(z, w).$$

**Definición 1.8.3.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, W)$  un espacio métrico hiperbólico. el conjunto*

$$\text{seg}[u, v] := \{W(u, v, \beta) : \beta \in [0, 1]\}$$

*es llamado segmento métrico con puntos finales  $u, v$*

**Observación 1.8.3.** *Si solo se satisface la condición (H1), entonces  $(\mathcal{M}, d, W)$  es un espacio métrico convexo en el sentido de Takahasi [89]. Las condiciones (H1)–(H3) equivalen a que  $(\mathcal{M}, d, W)$  sea un espacio de tipo hiperbólico en el sentido de Goebel y Kirk [33]. La condición (H4) fue considerada por Itoh [67] y luego utilizada en [69] (con la restricción en  $\beta$ , es decir,  $\beta = 1/2$ ) para definir la clase de espacios métricos hiperbólicos. La condición (H3) asegura que  $seg[u, v]$  es una imagen isométrica del segmento de línea real  $[0, d(u, v)]$ .*

Esa clase contiene todos los espacios normados lineales y subconjuntos convexos de los mismos, pero también la bola unitaria abierta en el espacio complejo de Hilbert con las métricas hiperbólicas, así como las variedades de Hadamard ([34] y [69]) y los espacios CAT(0) en el sentido de Gromov (ver [49] y [85]). La definición 1.8.1 de espacio hiperbólico es ligeramente más restrictiva que la dada por 1.8.2. Ya que [69] considera un espacio métrico  $(\mathcal{M}, d)$  junto con una familia  $\mathcal{F}$  de líneas métricas (en lugar de segmentos métricos) de modo que los espacios hiperbólicos en ese sentido son siempre ilimitados. La definición dada por 1.8.2 (como la noción de espacio de tipo hiperbólico de [33] y la noción de espacio métrico convexo de Takahashi) contrasta con esto de modo que cada subconjunto convexo de un espacio hiperbólico es en sí mismo un espacio hiperbólico. Además, el uso de un conjunto  $\mathcal{F}$  de segmentos tiene la consecuencia de que, en general, no se garantiza (como en el caso de las líneas métricas) que para  $u, v \in seg(x, y)$  con  $(u, v)$  diferente de  $(x, y)$ ,  $seg(u, v)$  es un subsegmento de  $seg(x, y)$  a menos que esté cerrado bajo subsegmentos. Es importante resaltar que cada espacio  $(X, d)$ , CAT(0) es un espacio hiperbólico (con  $W$  definido por una geodésica única en  $X$  que conecta dos puntos  $x, y \in X$ ). Dado que todo espacio hiperbólico en particular es un espacio geodésico (en el sentido de [49]).

Finalmente damos la definición de uniformidad convexa en espacios hiperbólicos enunciada por Buthinah Abdullatif Bin Dehaish y Mohamed Amine Khamsi ([7])

**Definición 1.8.4.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, W)$  un espacio métrico hiperbólico. Para cualquier  $r > 0$  y  $\varepsilon > 0$ , el conjunto*

$$\delta(r, \varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{1}{r} d\left(\frac{1}{2}u \oplus \frac{1}{2}v, a\right) : d(u, a) \leq r, d(v, a) \leq r, d(u, v) \geq r\varepsilon \right\}$$

*para cualquier  $a \in \mathcal{M}$ . Se dice que  $\mathcal{M}$  es uniformemente convexo si  $\delta(r, \varepsilon) > 0$  para cualquier  $r > 0$  y  $\varepsilon > 0$ .*

Entre las excelentes propiedades que satisface el espacio métrico hiperbólico uniformemente convexo  $(\mathcal{M}, d, W)$  está la propiedad (R)[46] que dice que si  $\{C_n\}$  es una sucesión

decreciente de subconjuntos no vacíos, acotados, convexos y cerrados de  $\mathcal{M}$ , entonces  $\bigcap_{n \geq 1} C_n \neq \emptyset$ . El siguiente lema técnico que nos servirá más adelante.

**Lema 1.8.9.** *Sea  $\mathcal{K}$  un subconjunto convexo cerrado de un espacio métrico hiperbólico uniformemente convexo  $(\mathcal{M}, d, W)$ . Sea  $\tau : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  un tipo de función. Entonces existe una sucesión acotada  $\{x_n\} \in \mathcal{M}$  tal que:*

$$\tau(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x);$$

para todo  $x, y \in \mathcal{K}$ . Entonces  $\tau$  es continua. Además, existe un punto mínimo único  $z \in \mathcal{K}$  tal que

$$\tau(z) = \inf\{\tau(u) : u \in \mathcal{K}\}.$$

## 1.9 $\Delta$ -Convergencia

Consideremos un espacio métrico  $(X, d)$ , además sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de  $X$  y  $\{x_n\}$  una sucesión acotada. Utilizaremos las siguientes notaciones para referirnos a los subconjuntos del espacio métrico  $X$  que nombramos a continuación.

- Radio relativo de Chebyshev de  $A$  con respecto de  $x$ :

$$r_x(A) = \sup\{d(x, y) : y \in A\}, \quad \text{donde } x \in X$$

- Radio de Chebyshev de  $A$  con respecto de  $B$ :

$$r_B(A) = \inf\{r_x(A) : x \in B\}$$

Si  $B = X$ , generalmente escribiremos tan solo  $r(A)$ .

- Centro de Chebyshev de  $A$ :

$$C(A) = \{x \in X : r_x(A) = r(A)\}.$$

- Envoltura por Bolas de  $A$

$$\text{cov}(A) = \bigcap \{B_i : B_i \text{ es una bola cerrada y } B_i \supseteq A\}.$$

- Diámetro de  $A$

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

- Distancia de  $x$  a  $A$ :

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) : y \in A\} \quad \text{donde } x \in X.$$

Ahora consideremos el siguiente límite, dado un punto  $x \in X$ , tenemos que;

$$r(x, x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n)$$

Entonces la función  $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$  definida como  $\varphi(x) = r(x, x_n)$  para todo  $x \in X$  recibe el nombre de *tipo*.

- Radio asintótico de  $\{x_n\}$ :

$$r(x_n) = \inf \{r(x, x_n) : x \in X\}.$$

- Radio asintótico de  $\{x_n\}$  con respecto de  $C \subseteq X$ :

$$r_C(x_n) = \inf \{r(x, x_n) : x \in C\}.$$

- Centro asintótico de  $\{x_n\}$ :

$$A(x_n) = \{x \in X : r(x, x_n) = r(x_n)\}.$$

- Centro asintótico de  $\{x_n\}$  con respecto de  $C \subseteq X$ :

$$A_C(x_n) = \{x \in C : r(x, x_n) = r_C(x_n)\}.$$

Un concepto bastante utilizado con respecto a la Teoría Métrica del Punto Fijo es el de la métrica de Hausdorff.

**Definición 1.9.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Denotamos  $\chi$  a la familia de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de  $\chi$ .

- Dados  $A \in \chi$  y  $\varepsilon > 0$ , se define el  $\varepsilon$ -entorno de  $A$  como

$$N_\varepsilon(A) = \{x \in \chi : d(x, A) < \varepsilon\}.$$

- Dados  $A, B \in \chi$ , se define la distancia de Hausdorff entre  $A$  y  $B$  como

$$H(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\}.$$

En 1976, Lim ([71]) introdujo un concepto de convergencia en un entorno de espacio métrico general al que llamó  $\Delta$ -convergencia fuerte. En esta sección mostramos el concepto de límite en espacios métricos CAT(0) el cual es estudiado en [87], comenzamos de manera directa la definición de este fantástico concepto que se denomina  $\Delta$ -convergencia, el cual hace parte fundamental en el desarrollo de los objetivos principales de este trabajo. Cabe aclarar que en toda esta sección,  $X$  denota un espacio CAT(0) completo.

**Definición 1.9.2.** *Una sucesión  $\{x_n\}$  en un espacio  $X$  se dice que  $\Delta$ -converge a  $x \in X$  si  $x$  es el único centro asintótico de  $\{u_n\}$  para cada  $\{u_n\}$  de  $\{x_n\}$ . En este caso se escribe  $\Delta - \lim x_n = x$  y se llama a  $x$  el  $\Delta -$  límite de  $\{x_n\}$ .*

Es importante resaltar que una sucesión acotada  $\{x_n\}$  en  $X$  es regular si  $r(\{x_n\}) = r(\{u_n\})$  para cada subsucesión  $\{u_n\}$  de  $\{x_n\}$ . Se sabe que cada sucesión acotada en un espacio de Banach tiene una subsucesión regular (ver [35]). La demostración es de naturaleza métrica y se traslada al escenario actual sin cambios. Dado que cada sucesión regular  $\Delta$ -converge, vemos inmediatamente que cada sucesión acotada en  $X$  tiene una subsucesión  $\Delta$ -convergente.

Note que  $\{x_n\} \subset X$  tal que  $\{x_n\}$   $\Delta$ -converge a  $x$  y dado  $y \in X$  con  $y \neq x$ ,

$$\limsup_n d(x_n, x) < \limsup_n d(x_n, y).$$

Por tanto,  $X$  satisface una condición que se conoce en los espacios de Banach como la propiedad Opial.

**Observación 1.9.1.** *Todo subconjunto cerrado acotado y convexo  $K$  de  $X$  es  $\Delta$ -cerrado en el sentido de que contiene los  $\Delta$ -límites de todas sus subsucesiones  $\Delta$ -convergentes (ver [61]). El siguiente hecho es una consecuencia de esto.*

**Proposición 1.9.1.** *Si una sucesión  $\{x_n\}$  en  $X$   $\Delta$ -converge a  $x \in X$ . entonces*

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\text{conv}} \{x_k + x_{k+1}, \dots\},$$

donde  $\overline{\text{conv}}(A) = \bigcap \{B : B \supseteq A; \text{ y } B \text{ es cerrado y convexo}\}.$

**Lema 1.9.2** ([87]).

(i) *Toda sucesión acotada en  $X$  tiene una subsucesión  $\Delta$ -convergente.*

(ii) Si  $K$  es un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y si  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada en  $K$ , entonces el centro asintótico de  $\{x_n\}$  está en  $K$ . (ver [61]).

(iii) Si  $K$  es un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y si  $f : K \rightarrow X$  un operador no expansivo, entonces las condiciones,  $\{x_n\}$   $\Delta$ -converge a  $x$  y  $d(x, f(x_n)) \rightarrow 0$ , implica  $x \in K$  y  $f(x) = x$ .

**Lema 1.9.3** ([62]). Si  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada en  $X$  con  $A(\{x_n\}) = \{x_n\}$  y  $\{u_n\}$  es una subsucesión de  $\{x_n\}$  con  $A(\{u_n\}) = \{u\}$  y la sucesión  $\{d(x_n, u)\}$  converge, entonces  $x = u$ .

**Lema 1.9.4** ([84]). Sea  $K$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio métrico completo  $\text{CAT}(0)$  y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación totalmente asintóticamente no expansiva. Si  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada en  $K$   $\Delta$ -convergente a  $x$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ , entonces  $x \in K$  y  $Tx = x$ .

## 1.10 Procesos Iterativos

Consideremos  $(X, d)$  un espacio métrico completo, la intención es construir una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  que converge a un punto fijo de  $T$ . La solución a tal problema es elegir arbitrariamente un punto inicial  $x_0 \in X$  luego considerar la sucesión iterada  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $x_0$  sobre  $T$  donde

$$x_{n+1} = F(T, x_n)$$

para alguna función  $F$ .

Si la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a un punto fijo de  $T$  podríamos dar por terminado el problema. Pero se debe tener en cuenta que se deben dar ciertas condiciones de contractividad a  $T$  y así garantizar la convergencia del proceso iterativo  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

**Definición 1.10.1.** Un proceso iterativo es la composición de un elemento consigo mismo en forma repetitiva partiendo de un  $x_0$  dado. En terminos matemáticos tenemos: Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación dada y  $x_0 \in X$ . Entonces la sucesión iterada dada por:

$$x_{n+1} = F(T, x_n), n = 1, 2, 3 \dots$$

donde  $x_0 \in X$  es el punto inicial dado y  $F$  una función arbitraria.

**Definición 1.10.2** (Iteración Picard). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  un operador dado. Sea  $x_0 \in X$  un punto arbitrario. Entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$  definida por:*

$$x_{n+1} = F(T, x_{n-1}) = Tx_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

*es llamada iteración de Picard.*

### 1.10.1 Método Iterativo de Mann

Aunque, cronológicamente, se introdujo dos años antes que la iteración de Krasnoselskij, la iteración de Mann es formalmente una generalización de está última y, en su forma normal, se obtiene reemplazando el parámetro  $\lambda$  en la fórmula de iteración por una sucesión de números reales  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1]$ . Dado que en muchos casos la convergencia de la iteración de Mann podría obtenerse de los resultados correspondientes probados para el procedimiento de iteración de Ishikawa, el objetivo de está sección es presentar de manera simple algunos resultados principales de la iteración de Mann si demostración alguna. Una referencia recomendada para el estudio de las iteraciones para la aproximación de puntos fijo es las notas en matemáticas escritas por Vasile Berinde ver [80].

**Definición 1.10.3.** *Sean  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial,  $C$  un subconjunto convexo de  $\mathbb{V}$  y sea  $T : C \rightarrow C$  una aplicación y  $x_1 \in C$  un punto arbitrario. Sea  $A = [a_{nj}]$  una matriz real infinita que satisface:*

$$(A_1) \quad a_{nj} \geq 0 \text{ para todo } nj \text{ y } a_{nj} = 0 \text{ para } j > n;$$

$$(A_2) \quad \sum_{j=1}^n a_{nj} = 1 \text{ para todo } n \geq 1$$

$$(A_3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj} = 0 \text{ para todo } j \geq 1$$

*La sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  definida por  $x_{n+1} = T(\nu_n)$  donde*

$$\nu_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j, \tag{1.10.1}$$

*es llamado proceso iterativo del Mann o simplemente iteración Mann.*

El proceso iterativo de Mann  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  se denota de manera más sencilla como  $M(x_1, A, T)$  indicando el punto inicial  $x_1$  la matriz  $A$  y el operador  $T$  a quien está asociado el proceso. Del mismo modo, podemos denotar el proceso iterativo de Krasnoselskij  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  como  $K(x_0, \lambda, T)$ .

## Ejemplo

Sea  $\mathbb{A}$  definida como la matriz Cesaro, i.e.,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

es fácil ver que  $\mathbb{A}$  satisface las hipótesis mencionadas sobre la matriz  $A$ . Entonces la sucesión  $\{x_n\}$  en  $C$  definida por (1.10.1) se reduce de la siguiente manera

$$x_{n+1} = T \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Existe una amplia literatura sobre la convergencia de la iteración de Mann para diferentes clases de operadores de tipo contractivo considerando diferentes espacios métricos. A continuación enunciamos sin demostración alguna, algunos teoremas de convergencia.

**Teorema 1.10.1.** *Si cualquiera de las sucesiones  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge, entonces la otra también converge al mismo punto, y su límite común es un punto fijo de  $T$ .*

**Definición 1.10.4.** *Se dice que un proceso de Mann  $M(x_1, A, T)$  es normal siempre que  $A = [a_{nj}]$  satisface  $(A_1)$ ,  $(A_2)$ ,  $(A_3)$ ,  $(A_4)$   $a_{n+1,j} = (1 - a_{n+1,n+1}) a_{nj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$  y  $(A_5)$  cualesquiera  $a_{nn} = 1$  para todo  $n$  ó  $a_{nn} < 1$  para todo  $n > 1$ .*

**Teorema 1.10.2.** *Lo siguiente es verdadero:*

- (a) *Para que  $M(x_1, A, T)$  sea un proceso Mann normal, es necesario y suficiente que  $A = [a_{nj}]$  satisface  $(A_1)$ ,  $(A_2)$ ,  $(A_3)$ ,  $(A_4)$ ,  $(A_5)$  y  $(A'3)$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_{nn}$  diverga.*



(b) La matriz  $A = [a_{nj}]$  (aparte de la matriz de identidad infinita) en todo el proceso normal de Mann  $M(x_1, A, T)$  se construyen de la siguiente manera:

Escoja  $\{c_n\}$  tal que  $0 \leq c_n < 1$  para todo  $n$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  diverge y defina  $A = [a_{nj}]$  por

$$\begin{cases} a_{11} = 1, a_{1j} = 0 & \text{para } j > 1; \\ a_{n+1, n+1} = c_n, n = 1, 2, 3 \dots; \\ a_{n+1, j} = a_{jj} \prod_{i=j}^n (1 - c_n) & \text{para } j = 1, 2 \dots n \\ a_{n+1, j} = 0 & \text{para } j > n + 1, n = 1, 2, 3 \dots \end{cases}$$

(c) la sucesión  $\{\nu_n\}$  es un proceso Mann normal  $M(x_1, A, T)$  satisfice

$$\nu_{n+1} = (1 - c_n) \nu_n + c_n T \nu_n \quad \text{para toda } n = 1, 2, 3 \dots;$$

donde

$$c_n = a_{n+1, n+1}.$$

Es fácil ver que de la Iteración de Mann, al colocar  $c_n = 1$  para cualquier  $n \geq 1$  se obtiene la iteración de Picard. La gran mayoría de teoremas de convergencia manejan una estructura muy similar, es decir para una aplicación  $T$  de  $\mathbb{V}$  en  $\mathbb{V}$  donde  $\mathbb{V}$  es un espacio métrico completo, además  $T$  satisfice una condición contractiva que puede o no ser lo suficientemente fuerte como para garantizar la convergencia a un punto fijo de la iteración de Picard asociada a  $T$ . Bajo estas condiciones, también se supone que la iteración de Mann asociada a  $T$  converge, para un determinado  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ , y luego se demuestra que, en estas circunstancias, converge a un punto fijo de  $T$ .

Todos estos tipos de resultados podrían obtenerse como casos particulares de algunos teoremas genéricos del siguiente tipo.

**Teorema 1.10.3.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach,  $K \subset E$  un subconjunto cerrado y convexo, y  $T : K \rightarrow K$  un operador dado. Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una iteración de Mann asociada a  $T$ . Suponga que  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a un  $p \in K$ . Si entonces existe las constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \leq 0$  y  $\delta > 1$  tal que

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Tp\| \leq & \alpha \cdot \|x_n - p\| + \beta \cdot \|x_n - Tx_n\| + \gamma \cdot \|p - Tx_n\| + \\ & \delta \cdot \max \{ \|p - Tp\|, \|x_n - Tp\| \}, \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

entonces  $p$  es punto fijo del operador  $T$ .

**Lema 1.10.4.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach uniformemente convexo y  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en el intervalo  $[a, b]$  donde  $0 < a < b < 1$ . Suponga que  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  son sucesiones en  $E$  tal que  $\alpha_n \leq 1$  y  $\beta_n \leq 1$  para cualquier  $n$ . entonces se define la sucesión  $z_n$  por:

$$z_n = (1 - c_n) \alpha_n + c_n \beta_n$$

si  $\lim \|z_n\| = 1$ , entonces  $\lim \|\alpha_n - \beta_n\| = 0$ .

**Definición 1.10.5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación arbitraria. Entonces se dice que  $T$  es un operador de Zamiferescu, si existen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a \in (0, 1)$  y  $b, c \in (0, 1/2)$  tales que para cada par  $x, y \in X$ , al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

$$z_1. d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$$

$$z_2. d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx), d(y, Ty)]$$

$$z_3. d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty), d(x, Ty)]$$

**Teorema 1.10.5.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach,  $K \subset E$  un subconjunto cerrado y convexo, y  $T : K \rightarrow K$  un operador de Zamiferescu, entonces la iteración de Mann  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10.3)$$

donde  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  satisface:

(i)  $\alpha_1 = 1$ ; (ii)  $0 \leq \alpha_n < 1$  para  $n > 1$  y (iii)  $\sum \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$ , entonces  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge al único punto de  $T$ .

El proceso iterativo general de Mann dado en la definición 1.10.4, fue introducido por W. Robert Mann en 1953 [90] donde demostró que converge en un espacio de Banach, más adelante Dotson [83] demostró que es válida en el contexto más general de un espacio topológico lineal Hausdorff localmente convexo, como se indica en el Teorema 1.10.2. La definición 1.10.4 y el teorema 1.10.2 son tomados de [83], respectivamente teorema 1. Donde se da la demostración al teorema. La demostración del teorema 1.10.3 puede consultarse en el artículo de Rhoades [10] teorema 1.

## 1.10.2 Método Iterativo de Ishikawa

Si  $T$  es una aplicación continua el proceso iterativo de Mann converge a un punto fijo de  $T$  bajo ciertas condiciones, pero si  $T$  no es continua no necesariamente converge a un

punto fijo de  $T$ , puede que converga a otro punto cualquiera. Ahora bien si, en lugar de la iteración de Mann, consideramos otro proceso iterativo, que en cierto sentido es un proceso iterativo de Mann de dos pasos, entonces es posible aproximar el punto fijo de algunas clases de operadores contractivos  $T$  para los cuales la iteración de Mann no converge a un punto fijo de  $T$ . Este nuevo proceso se llama método iterativo de Ishikawa, y se introdujo por primera vez para cierta clase de operadores lipschitzianos pseudocontractivos. Bajo ciertas suposiciones sobre las sucesiones  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ , este proceso iterativo converge fuertemente a un punto fijo de  $T$ . El resultado original de Ishikawa se indica a continuación.

**Teorema 1.10.6.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $K \subset H$  un subconjunto compacto y convexo, y sea  $T : K \rightarrow K$  un operador lipschitziano pseudocontractivo y  $x_1 \in K$ . Entonces la iteración de Ishikawa  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $x_n = I(x_1, \alpha_n, \beta_n, T)$ , definida por:*

$$x_{n+1} = \alpha_n T[\beta_n T x_n + (1 - \beta_n) x_n] + (1 - \alpha_n) x_n,$$

donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  y  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  son sucesiones de números reales positivos que satisfacen tres condiciones:

- i)  $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq 1$ ,  $n \geq 1$
- ii)  $\lim \beta_n = 0$ ;
- iii)  $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \beta_n = \infty$ ,

converge fuertemente a un punto fijo de  $T$ .

En su forma original, la iteración de Ishikawa no incluye el proceso iterativo Mann, debido a la suposición i) en el Teorema 1.10.6. De hecho, si uno tuviera  $\beta_n = 0$ , ( $n \geq 1$ ), entonces también resultaría  $\alpha_n = 0$ . En el esfuerzo por obtener una iteración de Ishikawa que debería incluir la iteración de Mann como un caso especial, algunos autores, entre ellos Naimpally y Singh, K.L. [63] Liu, Q. [42], han modificado (i) a una condición más débil de la forma  $0 \leq \alpha_n, \beta_n \leq 1$  con lo cual extiende el Teorema 1.10.6 a una clase de operadores Lipschitzianos hemiccontractivos. Un mapa hemiccontractivo es un mapa pseudocontractivo con respecto a un punto fijo, es decir, si  $p$  es un punto fijo de  $T$  y  $x$  es un punto en el espacio, entonces  $T$  satisface

$$\|Tx - p\|^2 \leq \|x - p\|^2 + \|x - Tx\|^2;$$

Todas las extensiones obtenidas hasta ahora cubren clases de operadores un poco más generales y todavía están confinadas a espacios de Hilbert. Para superar estas dificultades, algunos autores han introducido otros procesos iterativos, algunos de ellos serán enunciados más adelante en este mismo capítulo. A continuación se presenta un teorema de convergencia de la iteración de Ishikawa para operadores de Zamfirescu.

**Teorema 1.10.7.** *Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach,  $K \subset E$  un subconjunto cerrado convexo y  $T : K \rightarrow K$  un operador de Zamfirescu que satisface las condiciones  $(z_1) - (z_2)$ . Entonces la iteración de Ishikawa asociada a  $T$ , es decir la sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,*

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.10.4)$$

con  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  converge fuertemente a el único punto fijo de  $T$ .

Este importante teorema fue enunciado por Rhoades [8], está claro que los operadores de Zamfirescu contienen los operadores de Kannan y operadores de Chatterjea. Para una comparación de las diferentes condiciones contractivas involucradas en los teoremas de punto fijo, ver Rhoades [9].

Se han publicado algunos resultados que muestran que, para ciertas clases de operadores, las iteraciones de Mann e Ishikawa son en realidad equivalentes. Esto también apunta a la conclusión de que el uso de la iteración de Mann se recomendaría en esas circunstancias. Ahora enunciamos un Teorema donde se relaciona esta equivalencia.

**Teorema 1.10.8.** *Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de  $E$ , y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación que satisface:*

$$\|Tx - Ty\| \leq k \max \{ \|x - y\|, \|x - Tx\|, \|y - Ty\|, \|x - Ty\|, \|y - Tx\| \}.$$

para todo  $x, y \in K$ ,  $0 \leq k < 1$ . Suponga que  $T$  tiene un punto fijo  $x^* \in K$ . Entonces lo siguiente es verdadero

- i La iteración de Mann 1.10.3 converge a  $x^*$ ;*
- ii La iteración de Ishikawa 1.10.4 converge a  $x^*$ .*

Este Teorema fue publicado por Rhoades y Solutuz [11], donde además demuestran la equivalencia entre la iteración de Ishikawa y Mann para otros tipos de operadores tales

como los denominados fuertemente Pseudoccontractivos Lipschitziana.

Los dos procesos de iteración descritos anteriormente han sido estudiados por varios autores para aproximar puntos fijos de aplicaciones no lineales o soluciones de ecuaciones de operadores no lineales en espacios de Banach.

### 1.10.3 Iteración de Mann e Ishikawa con errores

Como se había mencionado anteriormente las iteraciones de aproximaciones de punto fijo con errores fueron introducidos por Liu [40], [41], la idea surge al analizar los cálculos numéricos prácticos; varios trabajos investigativos se han enfocado en este tipo de iteraciones debido al problema de la estabilidad.

**Definición 1.10.6.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto y sea  $T : K \rightarrow E$  una aplicación. La sucesión  $\{x_n\} \in E$  definida por

$$\begin{aligned} x_0 &\in K, \\ x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n + u_n, \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n + v_n, \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{1.10.5}$$

donde  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$  son sucesiones en  $[0, 1]$  y  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$  son dos sucesiones sumables en  $E$ , es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < \infty,$$

es llamada la iteración de Ishikawa con errores.

Si se toma  $\beta_n = 0$  y  $v_n = 0$  en la iteración de Ishikawa con errores se obtiene la iteración de Mann con errores. A continuación enunciamos uno de los primeros resultados de punto fijo bajo este tipo de iteraciones.

**Teorema 1.10.9.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach,  $K \subset E$  un subconjunto cerrado y uniformemente suave. Sea  $T : K \rightarrow E$  una aplicación lipschitziana (con  $l \geq 1$ ) y estrictamente pseudocontractiva es decir,

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|(I - T)x - (I - T)y\|^2,$$

con  $t > 1$ , para todo  $x, y \in E$ . Sea  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$  dos sucesiones sumables en  $E$  y sea  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$  dos sucesiones en  $[0, 1]$  que satisfacen

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad (ii) \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < k/L(L + 1), \tag{1.10.6}$$

donde  $k = (t - 1)/t$ .

Si el rango  $T(K)$  de  $T$  es cerrado, entonces  $\{x_n\} \subset K$  generada por 1.10.5 converge fuertemente al único punto fijo de  $T$ .

Si las sucesiones  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$  son nulas, se obtiene el proceso iterativo clásico de Ishikawa. Algo que cabe resaltar es que no existe explicación alguna sobre como las sucesiones  $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$  están en  $E$ , y asegurar que  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ , está en  $K$ .

#### 1.10.4 Iteración de Mann e Ishikawa modificados

A continuación mostraremos algunos teoremas de convergencia para operadores Lipschitzianos de tipo contractivo, considerando la  $n$ -ésima iteración de  $T^n$  en lugar de  $T$  en los procesos iterativos definidos en las secciones anteriores es decir en los procesos iterativos de Mann e Ishikawa.

**Definición 1.10.7.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto y sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación y  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$  dos sucesiones en  $[0, 1]$ . La sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  definida por:

$$\begin{aligned} x_0 &\in K, \\ x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n y_n + \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n, \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{1.10.7}$$

se llama proceso iterativo de Ishikawa modificado.

Si hacemos  $\beta_n = 0$  por cada  $n \geq 0$  en 1.10.7, se obtiene el proceso iterativo de Mann modificado.

**Definición 1.10.8.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto y sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación.

1.  $T$  es llamada Asintóticamente no expansiva si entonces existe una sucesión  $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$  en  $[1, \infty)$  con  $k_n = 1$  tal que

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in K \quad \text{y } n \geq 1$$

2.  $T$  es llamada uniformemente  $L$ -Lipschitziana con  $L > 0$  si

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in K \quad \text{y } n \geq 1$$

3.  $T$  es llamada *Asintóticamente  $k$ -estricta pseudocontractive* si entonces existe una sucesión  $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$  en  $[1, \infty)$  con  $k_n = 1$  y una constante  $k$  en  $[0, 1)$  tal que

$$\|T^n x - T^n y\|^2 \leq k_n^2 \|x - y\|^2 + k \|(x - T^n x) - (y - T^n y)\|^2,$$

para todo  $x, y \in K$  y  $n \geq 1$ ;

4.  $T$  es llamada *Asintóticamente demicontractiva* si  $F_T \neq \emptyset$ , entonces existe una sucesión  $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$  en  $[1, \infty)$  con  $k_n = 1$  y una constante  $k$  en  $[0, 1)$  tal que para todo  $x \in K, p \in F_T, n \geq 1$

$$\|T^n x - p\|^2 \leq k_n^2 \|x - p\|^2 + k \|x - T^n x\|^2 \quad (1.10.8)$$

**Lema 1.10.10.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto y sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación  $L$ -Lipschitziana, Si  $\|r_n = \|x_n - Tx_n\|, n \geq 0$ , donde  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  es un proceso iterativo de Ishikawa modificado asociado a  $T$ , entonces

$$\|x_n - Tx_n\| \leq r_n + r_{n-1}L(1 + 3L + 2L^2), \quad n \geq 1.$$

**Teorema 1.10.11.** Sea  $K$  un subconjunto cerrado convexo no vacío y acotado de un espacio de Hilbert  $H$  y sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación completamente continua, uniformemente  $L$ -Lipschitziano y asintóticamente demicontractivo. Suponga que la sucesión  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  que aparece en (2.3.2) satisface

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k_n - 1) < \infty$$

Asuma que  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$  son sucesiones reales en  $[0, 1]$  que satisfacen

$$\begin{aligned} 0 < a \leq \alpha_n, \quad n \geq 0; \\ 0 < b \leq \beta_n \leq \min \left\{ 1 - k - c, \frac{\sqrt{1 + 4(1-d)L^2} - 1}{2L^2} \right\}, \quad n \geq 0; \\ \alpha_n - k\beta_n \leq 1 - k, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

donde  $k$  es la constante que aparece en 2.3.2, y  $a, b, c$  son constante con  $c + d > 0, 0 \leq c < 1 - k$  y  $0 \leq d < 1$ .

Entonces el proceso iterativo de Ishikawa modificado  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  definido por 1.10.7 converge fuertemente algún punto fijo de  $T \in K$ .

Nótese que en el caso particular donde  $\beta_n = 0$ , para todo  $n \geq 0$ , y por el Teorema 1.10.11 se obtiene resultados de convergencia fuerte para el proceso iterativo de Mann modificado.

### 1.10.5 Iteración de Mann perturbada

Es posible considerar una perturbación en los procesos iterativos para la aproximación de puntos fijos en distintas clases de operadores en espacios de Banach más generales que los espacios de Hilbert. La idea al construir este tipo de métodos es comprobar que dicho método proporciona una sucesión aproximada a la convergencia de puntos fijos. A continuación se considera una iteración de Mann perturbada que proporcionará sucesiones aproximadas de puntos fijos para los operadores Lipschitzianos pseudocontractivos en espacios de Banach. Para esto se necesita dos sucesiones de números reales en  $(0, 1]$ ,  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ , las cuales satisfacen las siguientes condiciones:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ ;
- (ii)  $\lambda_n (1 + \theta_n) \leq 1$ ;
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\theta_n} = 0$
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} - 1 \right) / (\lambda_n \theta_n) = 0$

**Definición 1.10.9.** Sea  $E$  un espacio de Banach y  $T : E \rightarrow E$  una aplicación. La sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in E$  satisface  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ , es llamada una sucesión aproximada de puntos fijos de la aplicación  $T$ .

**Lema 1.10.12.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto convexo y cerrado. Sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación Lipschitziana pseudocontractiva con constante de Lipschitz  $L \geq 0$  y  $F_T \neq \emptyset$ . Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  un sucesión generada desde un punto arbitrario  $x_1 \in K$  por

$$x_{n+1} = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - \lambda_n \theta_n (x_n - x_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.10.9)$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ .

La sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dada por (1.10.9) es llamada iteración de Mann perturbada. Se puede utilizar el Lema 1.10.12 y algunos otros resultados se puede demostrar los siguientes teoremas de convergencia.

**Teorema 1.10.13.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto convexo y cerrado. Sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación Lipschitziana pseudocontractiva con constante de Lipschitz  $L \geq 0$  y  $F_T \neq \emptyset$ . Suponga que  $T$  es completamente continua. Entonces



la iteración de Mann perturbada  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dada por (1.10.9) con  $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  que satisfacen las condiciones (i)-(iv) converge fuertemente al punto fijo de  $T$ .

**Teorema 1.10.14.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto convexo y cerrado. Sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación Lipschitziana pseudocontractiva con constante de Lipschitz  $L \geq 0$ . Suponga que  $T$  es completamente continua. Entonces  $T$  tiene un punto fijo en  $K$  y la iteración de Mann perturbada  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dada por (1.10.9) con  $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  que satisfacen las condiciones (i)-(iv) converge fuertemente al punto fijo de  $T$ .

**Teorema 1.10.15.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto convexo y cerrado. Sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación Pseudocontractiva uniformemente continua. Sea la iteración de Mann perturbada  $\{x_n\}$  dada por (1.10.9) con  $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  que satisfacen las condiciones (i)-(iv). Suponga que  $\|Tx_n - Tx_n\| = o(\theta_n)$  y  $T$  es completamente continua. Entonces  $T$  tiene punto fijo y  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge fuertemente al punto fijo de  $T$ .

### 1.10.6 Proceso S-iterativo

En el año 2007 R.P Agarwal, Donal O'Regan y D.R Sahu ([55]) proponen un nuevo proceso iterativo cuya tasa de convergencia es similar al proceso iterativo de Picard y es más rápido que otros procesos de iteración de punto Fijo. Ellos aplican este método para la aproximación de puntos fijos para aplicaciones casi asintóticamente no expansivos.

**Definición 1.10.10.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio lineal,  $K \subset E$  un subconjunto convexo, el proceso iterativo  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  generado desde  $x_1 \in K$  defino por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_nTy_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.10.10)$$

donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones en  $[0, 1]$  que satisfacen la condición:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n (1 - \beta_n) = \infty \quad (1.10.11)$$

La sucesión (1.10.10) está definida siempre y cuando  $K$  sea convexo. Este proceso iterativo es llamado S-iteración. Es fácil ver que (1.10.10) es independiente de (1.10.4) y por ende (1.10.3).

**Lema 1.10.16.** Sea  $\bar{E}$  un espacio reflexivo de Banach que satisface la condición Opial,  $K$  un subconjunto no vacío cerrado y convexo de  $X$  y  $T : K \rightarrow X$  un operador tal que;

$$(i) F(T) = \emptyset$$

(ii)  $I - T$  es demicerrado en cero.

Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $K$  la cual satisface las siguiente propiedades:

$$D_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \text{ existe para todo } p \in F(T);$$

$$D_2 \lim \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

Entonces  $\{x_n\}$  converge debilmente a un punto fijo de  $T$ .

**Teorema 1.10.17.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto convexo y cerrado y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación  $k$ -contracción casi uniforme con sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $F(T) \neq \emptyset$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ . Para  $x_1 \in K$ , sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión definida por (1.10.10), donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones en  $(0, 1)$ . Entonces lo siguiente es verdadero:

$$(a) \|x_{n+1} - p\| \leq k\|x_n - p\| + k(1+k)a_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N};$$

(b)  $\{x_n\}$  converge fuertemente a un punto fijo de  $T$

**Teorema 1.10.18.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto convexo y cerrado y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación casi asintóticamente no expansivo con sucesión  $\{(a_n, \eta(T^n))\}$  y  $F(T) \neq \emptyset$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} (\eta(T^n) - 1) < \infty$ . Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión definida por (1.10.10) donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones en  $(0, 1)$  tal que  $0 < a \leq a_n$ ,  $\beta_n \leq b < 1$ . Entonces los siguiente es verdadero:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = \lim \|y_n - p\| \text{ existe para } p \in F(T);$$

$$(b) \lim \|x_n - T^n x_n\| = 0;$$

(c) si  $T$  es uniformemente continua, se deduce que  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  cumple con la propiedad  $D_2$

En el artículo de Agarwal et. [55], se encuentra las demostraciones de estos y otros teoremas donde el proceso iterativo (1.10.10) cumple con las condiciones  $D_1 - D_2$ .

### 1.10.7 Proceso iterativo “CR”

El proceso que vamos a enunciar a continuación que entra en la categoría de procesos de tres pasos fue propuesto en 2012 por Renu Chung, Vivek Kumar y Sanjay Kumar [56] ellos realizan el estudio convergencia fuerte de este esquema iterativo para una cierta clase de operadores cuasi-contractivos en espacios de Banach. Mostramos que para la clase de operadores antes mencionados, el esquema iterativo “CR” es equivalente y más rápido que las iteraciones Picard, Mann e Ishikawa. Ellos introducen el siguiente proceso iterativo:

**Definición 1.10.11.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach,  $T : E \rightarrow E$  una aplicación y  $x_0 \in X$ . Se define la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  por:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.10.12)$$

donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones de números reales en  $[0, 1]$ .

Berinde [79] introduce la siguiente clase de operadores en espacios Banach los cuales satisfacen:

$$d(Tx, Ty) \leq 2\delta d(x, Tx) + \delta d(x, y), \quad (1.10.13)$$

para todo  $x, y \in X$  y algún  $\delta \in [0, 1)$ . A continuación escribimos el teorema principal sin demostración alguna la cual, pueden encontrar en el artículo original [56].

**Teorema 1.10.19.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto convexo y cerrado y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación que satisface (1.10.13). Sea  $\{x_n\}$  definida por la iteración “CR” (1.10.12) y  $x_0 \in \mathbb{E}$  donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones de números positivos en  $[0, 1]$  con  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  que satisface  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ . Entonces  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge fuertemente a el punto fijo de  $T$ .

Finalmente enunciamos el siguiente teorema de equivalencia entre el método iterativo y agunos esquemas conocidos en la literatura

**Teorema 1.10.20.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $K \subset E$  un subconjunto convexo y cerrado y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación que satisface (1.10.13). Dado un punto inicial igual,  $\alpha_n \geq A > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces se tiene las siguientes equivalencias:

i) La Iteración de Mann (1.10.3) converge a un punto fijo  $T$ .

ii) La *S-Iteración* (1.10.10) converge a un punto fijo de  $T$ .

iii) La “*CR-Iteración*” (1.10.12) converge a un punto fijo de  $T$ .

### 1.10.8 Iteración Modificada hybrida-Ishikawa

En el año 2013 Khan et. [64] publicaron en un estupendo artículo un nuevo proceso iterativo para operadores no expansivos, el cual denominaron “Picard-Mann Hybrid iteration process” en este artículo afirman que este proceso es independiente del proceso iterativo de Picard y Mann, además que este proceso converge más rápido que el proceso Picard y Mann. La sucesión  $\{x_n\}$  este proceso viene dado por

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.10.14)$$

donde  $\{\alpha_n\}$  en  $(0, 1)$

Por otra parte, como ya habíamos indicado en la introducción, como Kirk inicio el estudio de la teoría métrica del punto fijo en espacios métrico con curvatura no positiva, demostrando que para operadores no expansivos definidos en un subconjunto cerrado acotado de un espacio métrico completo CAT(0) tiene un punto fijo, lo cual motivo a Pansuwan y Sintunavarat [4] a proponer un nuevo método iterativo al cual denominaron Iteración Modificada hybrida-Ishikawa para aproximar puntos fijos en operadores no expansivos totalmente asintóticas, el proceso es el siguiente:

$$\begin{cases} x_{n+1} = T^n y_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)z_n \oplus \alpha_n T^n z_n \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n \oplus \beta_n T^n x_n. \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.10.15)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones en  $[0, 1]$ . A continuación enunciamos algunos teoremas sin demostración alguna, las cuales pueden consultar en [4]

**Teorema 1.10.21.** *Sea  $(X, d)$  un espacio CAT0 y  $C$  un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y  $T : C \rightarrow C$  un operador uniformemente Lipschitziano y no expansiva  $(\{\nu_n\}, \{u_n\}, \zeta)$ -totalmente asintótica. Suponga que satisface las siguientes condiciones:*

i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \infty$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ ;

ii) entonces existe las constantes  $a, b$  con  $0 < a \leq \alpha_n < 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $0 < a(1 - b) \leq \frac{1}{2}$ ;

iii) entonces existe una constante  $M^*$  tal que  $\zeta(r) \leq M^*r$  para todo  $r \geq 0$ .

Entonces la sucesión definida por (2.2.2)  $\Delta$ -converge algún punto  $p \in F(T)$ , donde  $F(T)$  es el conjunto de puntos fijos de  $T$ .

**Teorema 1.10.22.** Sea  $(X, d)$  un espacio  $\text{CAT}(0)$  y  $C$  un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y  $T : C \rightarrow C$  un operador uniformemente Lipschitziano y no expansiva  $(\{\nu_n\}, \{u_n\}, \zeta)$ -totalmente asintótica. Suponga que satisface las siguientes condiciones:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty;$$

ii) entonces existe las constantes  $a, b$  con  $0 < a \leq \alpha_n < 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $0 < a(1 - b) \leq \frac{1}{2}$ ;

iii) entonces existe una constante  $M^*$  tal que  $\zeta(r) \leq M^*r$  para todo  $r \geq 0$ .

Entonces la sucesión definida por (2.2.2) converge a un punto fijo de  $T$  sí y solo sí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0,$$

donde  $d(x, F(T)) := \inf \{d(x, p) : p \in F(T)\}$ .

### 1.10.9 Algoritmo de punto proximal

El algoritmo de punto proximal, es una herramienta bien conocida para encontrar mínimos de funciones convexas, se generaliza desde el marco de espacio métricos clásicos como lo son los de Hilbert a un entorno no lineal, es decir, espacios métricos geodésicos de curvatura no positiva, ya que sabemos que muchos de los algoritmos para resolver problemas de optimización se han generalizado desde espacios lineales (Euclidianos, Hilbert, Banach) en múltiples diferenciables y en como un caso particular, el algoritmo de punto proximal en el contexto de la variedad Riemanniana (de curvatura seccional no positiva) los cuales han sido estudiados por diversos autores.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico geodésico y  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función convexa y propia. Uno de los principales problemas de la optimización es encontrar  $x \in X$  tal que

$$f(x) = \min_{y \in X} f(y).$$

Donde es usual denotar como  $\operatorname{argmin}_{y \in X} f(y)$  al conjunto de minimizadores de  $f$ . Como ya se había mencionado una herramienta eficaz y poderosa para resolver este problema es

el conocido algoritmo de punto proximal (*de manera abreviada en inglés PPA*) la cual fue en principio propuesta por Martinet [12] en 1970. Posterior a esto en 1976, Rockafellar [59] estudia una generalización del PPA, para la convergencia a una solución del problema de minimización convexa en el marco de los espacios de Hilbert. De hecho, dada una función adecuada, convexa y semicontinua inferior en un espacio de Hilbert  $H$  que alcanza su mínimo. El PPA está definido por  $x_1 \in H$ ;

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left( f(y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - x_n\|^2 \right)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\lambda_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se demostro que la sucesión  $\{x_n\}$  converge debilmente a los minimizadores de  $f$  bajo la condición  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ . En el año 2013, Bacák [44] introduce el PPA en espacios métricos CAT(0) el cual es el siguiente:  $x_1 \in X$ ;

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left( f(y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\lambda_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Partiendo del concepto de monotonía de Fejér, se demostró que, si  $f$  tiene un minimizador y  $\{x_n\}$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$   $\Delta$ -converge a estos minimizadores. Bajo esta misma línea de investigación Bacák [45] empleó una versión dividida del PPA para minimizar una suma de funciones convexas en espacios CAT(0).

Por otra parte cabe resaltar que la función  $f : C \rightarrow (-\infty, \infty]$  definida en un subconjunto convexo  $C$  de un espacio métrico CAT(0) es convexa si, para cualquier geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ , la función  $f \circ \gamma$  es convexa. Se dice que una función  $f$  definida en  $C$  es semicontinua inferior en un punto  $x \in C$  si

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

para cada sucesión  $x_n \rightarrow x$ . Una función  $f$  se dice que es *semicontinua inferior* en  $C$  si está semicontinua inferior en  $C$ . Para cualquier  $\lambda > 0$ , se define el resolutivo Moreau-Yosida de  $f$  en un espacio métrico CAT(0) como

$$J_\lambda = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left[ f(y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x) \right]$$

para todo  $x \in X$ . La aplicación  $J_\lambda$  está bien definida para todo  $\lambda > 0$ .

Sea  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función adecuada, convexa y semicontinua inferior. En [45]

demonstraron que el conjunto  $F(J_\lambda)$  de puntos fijos del resolvente asociado con  $f$  coincide con el conjunto  $\operatorname{argmin}_{y \in X} f(y)$  de minimizadores de  $f$ .

**Lema 1.10.23** ([87]). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo CAT(0) y  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función adecuada convexa y semicontinua inferiormente. Para cualquier  $\lambda > 0$ , el resolvente  $J_\lambda$  de  $f$  es no expansivo.*

**Lema 1.10.24** ([38]). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo CAT(0) y  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función adecuada convexa y semicontinua inferiormente. Entonces, para todo  $x, y \in X$  y  $\lambda > 0$ , tenemos*

$$\frac{1}{2\lambda}d^2(J_\lambda x, y) - \frac{1}{2\lambda}d^2(x, y) + \frac{1}{2\lambda}d^2(x, J_\lambda x) + f(J_\lambda x) \leq f(y).$$

**Proposición 1.10.25** ([87]). *(Identidad resolvente) Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo CAT(0) y  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función adecuada convexa y semicontinua inferiormente. Entonces la siguiente identidad es verdadera:*

$$J_\lambda x = J_\mu \left( \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \oplus \frac{\mu}{\lambda} x \right)$$

para todo  $x, y \in X$  y  $\lambda > 0, \mu > 0$ .

# CAPÍTULO 2

---

## ALGORITMO HÍBRIDO CON PERTURBACIONES PARA APLICACIONES TOTALMENTE ASINTÓTICAMENTE NO EXPANSIVAS EN ESPACIOS MÉTRICOS $CAT(0)$

En esta sección establecemos teoremas de convergencia de la iteración CR híbrido modificado de tres pasos con perturbaciones para un operador asintóticamente no expansivo en espacios  $CAT(0)$ . Los resultados obtenidos mejoran y amplían los resultados correspondientes de la literatura actual. También proporcionamos tres ejemplos para ilustrar el comportamiento de convergencia del algoritmo propuesto y comparar numéricamente la convergencia del esquema de iteración propuesto con los esquemas existentes.

### 2.1 Aplicaciones asintóticamente no expansivas

Comenzamos esta sección con la definición de algunos conceptos básicos para operadores no lineales en espacios métricos. Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K$  un subconjunto no vacío. Entonces  $T : K \rightarrow K$  se dice que es:

1. **Contracción** si entonces existe un  $k \in [0, 1)$  tal que  $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ , para todo  $x, y \in K$ .
2. **No expansiva** si  $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ , para todo  $x, y \in K$ .
3. **Asintóticamente no expansiva** si para una sucesión  $u_n \subset [0, \infty)$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  tal que  $d(T^n x, T^n y) \leq (1 + u_n)d(x, y)$  para todo  $x, y \in K$  y  $n \geq 1$ .
4. **Uniformemente L-lipschitziana** si entonces existe  $L \geq 0$  tal que  $d(T^n x, T^n y) \leq Ld(x, y)$  para todo  $x, y \in K$  y  $n \geq 1$ .



5. **Semi-compacta** si para una sucesión  $\{x_n\}$  en  $K$  con  $\lim d(x_n, Tx_n) = 0$ , entonces existe una subsucesión  $\{x_{n_j}\}$  de  $\{x_n\}$  tal que  $\{x_{n_j}\} \rightarrow p \in K$

Todo operador contractivo y todo operador no expansivo son operadores asintóticamente no expansivos. Sin embargo el recíproco puede ser no cierto.

**Definición 2.1.1.** *Un operador  $T : X \rightarrow X$  es llamado totalmente asintóticamente no expansivo, si entonces existen sucesiones no negativas  $\{\mu_n\}$ ,  $\{\nu_n\}$  con  $\{\mu_n\} \rightarrow 0$ ,  $\{\nu_n\} \rightarrow 0$  y una función continua estrictamente creciente  $\zeta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  con  $\zeta(0) = 0$  tal que*

$$d(T^n x, T^n y) \leq d(x, y) + \nu_n \zeta(d(x, y)) + \mu_n \quad (2.1.1)$$

para todo  $x, y \in K$  y  $n \geq 1$ .

De las definiciones anteriores se deduce que cada operador no expansivo es un operador asintóticamente no expansivo con  $k_n = 1$ ,  $\forall n > 1$  y que cada operador asintóticamente no expansivo es un operador totalmente asintóticamente no expansivo con  $\nu_n = k_n - 1$ ,  $\mu_n = 0$ ,  $\nu_n \geq 1$ ,  $\zeta(t) = t, \forall t \geq 0$ . Además, cada aplicación asintóticamente no expansivo es un aplicación uniformemente L-Lipschitziano con  $L = \sup_{n \geq 1} \{k_n\}$ . Sin embargo, lo contrario de estas afirmaciones no es cierto, en general.

## 2.2 Iteración Híbrida con perturbaciones

Varios han sido los trabajos donde se estudia la convergencia para aproximación de puntos fijos en distintas aplicaciones contractivas, algunos de estos esquemas que son notables en la literatura fueron ya mencionados en el capítulo 1. Un esquema iterativo que sirve de motivación para los resultados principales de esta memoria, es el propuesto en [70] donde se estudia a profundidad, la aproximación iterativa de punto fijo para aplicaciones totalmente asintóticamente no expansivos, utilizando un proceso de iteración de Krasnoselskii-Mann modificado. Mencionamos algunos trabajo encaminados en esta línea de investigación (ver [92],[4], [91]).

Thakur et al. [13] propone un proceso de iteración denominado híbrido-Mann modificado, para la aproximación de puntos fijos de operadores totalmente asintóticamente no expansivos en espacios CAT(0). La sucesión  $\{x_n\}$  viene dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = T^n y_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)x_n \oplus \alpha_n T^n x_n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2.1)$$

donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de números reales en el intervalo  $[0, 1]$ . Posteriormente, Pansuwan y Sintunavarat [4] proponen un esquema iterativo al cual denominaron Iteración Modificada híbrida-Ishikawa para aproximar puntos fijos en operadores no expansivos totalmente asintóticas, el proceso es el siguiente:

$$\begin{cases} x_{n+1} = T^n y_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)z_n \oplus \alpha_n T^n z_n \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n \oplus \beta_n T^n x_n. \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2.2)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones en  $[0, 1]$ .

Motivados e inspirados por Chugh et al. [56], Kumam et al. [84], Pansuwan y Sintunavarat [4] y Saluja y Postolache [25] y algunos otros.

Considere  $(X, d)$  un espacio métrico completo CAT(0) y  $K$  un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación totalmente asintóticamente no expansiva y uniformemente L-Lipschitziana con  $F(0) \neq \emptyset$ . Proponemos la iteración de tres pasos híbrida con perturbaciones. El esquema es el siguiente:

$$\begin{cases} x_{n+1} = T^n((1 - \alpha_n - \alpha'_n)y_n \oplus \alpha_n T^n y_n \oplus \alpha'_n \epsilon_n) \\ y_n = (1 - \beta_n - \beta'_n)T^n x_n \oplus \beta_n T^n z_n \oplus \beta'_n \epsilon'_n \\ z_n = (1 - \gamma_n - \gamma'_n)x_n \oplus \gamma_n T^n x_n \oplus \gamma'_n \epsilon''_n, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2.3)$$

donde  $\{\epsilon_n\}$ ,  $\{\epsilon'_n\}$  y  $\{\epsilon''_n\}$  son sucesiones en  $K$  y  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\alpha'_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\beta'_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\gamma'_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones apropiadas de números reales  $[0, 1]$ . El siguiente Lema lo utilizaremos para la demostración de nuestros teoremas principales.

**Lema 2.2.1** ([37]). *Suponga que  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{\delta_n\}$  son sucesiones no negativas de números reales tal que  $a_{n+1} \leq (1 + \delta_n)a_n + b_n$  para todo  $n \geq 1$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe.*

## 2.3 $\Delta$ -Convergencia y Convergencia Fuerte

Demostraremos los siguientes lemas que no serán de utilidad para la iteración híbrida con perturbaciones propuesta (2.2.3) para la aplicación totalmente asintóticamente no expansiva en espacios métricos CAT(0).

**Lema 2.3.1.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo CAT(0) y  $K$  un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación totalmente asintóticamente no expansiva,*

con  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \infty$  y  $F(T) \neq \emptyset$ . Sea  $\{x_n\}$  la sucesión definida por (2.2.3) tal que:

$$C1) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n < \infty \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty.$$

$$C2) \text{ Existe una constante } M_1 > 0 \text{ tal que } \zeta(r) \leq M_1 r, r \geq 0.$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$  and  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T))$  existe para todo  $p \in F(T)$ .

**Demostración.** Sea  $p \in F(T)$ . Trivialmente de (C2),

$$d(T^n x, p) \leq (1 + \nu_n M_1) d(x, p) + \mu_n. \quad (2.3.1)$$

Desde (2.2.3), (2.3.1) y Lema 1.6.7 tenemos

$$\begin{aligned} d(z_n, p) &= d((1 - \gamma_n - \gamma'_n)x_n \oplus \gamma_n T^n x_n \oplus \gamma'_n \epsilon''_n, p) \\ &\leq (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d(x_n, p) + \gamma_n [(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n] + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) \\ &\leq (1 - \gamma_n - \gamma'_n) (1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \gamma_n [(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n] + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) \\ &= (1 - \gamma'_n) (1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \gamma_n \mu_n + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) \\ &\leq (1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Ahora utilizando (2.2.3), (2.3.2) y Lema 1.6.7, obtenemos

$$\begin{aligned} d(y_n, p) &= d((1 - \beta_n - \beta'_n) T^n x_n \oplus \beta_n T^n z_n \oplus \beta'_n \epsilon'_n, p) \\ &\leq (1 - \beta_n - \beta'_n) [(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n] \\ &\quad + \beta_n [(1 + \nu_n M_1) d(z_n, p) + \mu_n] + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) \\ &\leq (1 - \beta_n - \beta'_n) [(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n] \\ &\quad + \beta_n [(1 + \nu_n M_1) [(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p)] + \mu_n] \\ &\quad + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} d(y_n, p) &\leq (1 - \beta_n - \beta'_n) (1 + \nu_n M_1)^2 d(x_n, p) + (1 + \nu_n M_1) (1 - \beta_n - \beta'_n) \mu_n \\ &\quad + \beta_n (1 + \nu_n M_1)^2 d(x_n, p) + \beta_n \mu_n (1 + \nu_n M_1) + \beta_n \mu_n \\ &\quad + \beta_n \gamma'_n (1 + \nu_n M_1) d(\epsilon''_n, p) + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) \\ &= (1 - \beta'_n) (1 + \nu_n M_1)^2 d(x_n, p) + (1 + \nu_n M_1) (1 - \beta'_n) \mu_n \\ &\quad + \beta_n \mu_n + \beta_n (1 + \nu_n M_1) \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) \\ &\leq (1 + \nu_n M_1)^2 d(x_n, p) + (2 + \nu_n M_1) \mu_n + (1 + \nu_n M_1) \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) + \beta'_n d(\epsilon'_n, p). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Denotemos a  $w_n = (1 - \alpha_n - \alpha'_n)y_n \oplus \alpha_n T^n y_n \oplus \alpha'_n \epsilon_n$ . Ahora utilizando (2.3.4) y Lemma 1.6.7, obtenemos

$$\begin{aligned}
d(w_n, p) &= d((1 - \alpha_n - \alpha'_n)y_n \oplus \alpha_n T^n y_n \oplus \alpha'_n \epsilon_n, p) \\
&\leq (1 - \alpha'_n + \alpha_n \nu_n M_1) [(1 + \nu_n M_1)^2 d(x_n, p) + (2 + \nu_n M_1) \mu_n \\
&\quad + (1 + \nu_n M_1) \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) + \beta'_n d(\epsilon'_n, p)] + \alpha_n \mu_n + \alpha'_n d(\epsilon_n, p) \\
&\leq (1 + \nu_n M_1)^3 d(x_n, p) + [(1 + \nu_n M_1)(2 + \nu_n M_1) + \alpha_n] \mu_n \\
&\quad + (1 + \nu_n M_1)^2 \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) + (1 + \nu_n M_1) \beta'_n d(\epsilon'_n, p) + \alpha'_n d(\epsilon_n, p).
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Entonces por (2.1.1), (2.2.3) y (2.3.5) obtenemos

$$d(x_{n+1}, p) = d(T^n(w_n), p) \leq (1 + \nu_n M_1) d(w_n, p) + \mu_n \leq (1 + A_n) d(x_n, p) + B_n + \varepsilon_n,$$

donde  $A_n = 4M_1 \nu_n + 6M_1^2 \nu_n^2 + 4M_1^3 \nu_n^3 + M_1^4 \nu_n^4$ ,  $B_n = (3 + 5\nu_n M_1 + 4\nu_n^2 M_1^2 + \nu_n^3 M_1^3 + (1 + \nu_n M_1)) \mu_n$  y  $\varepsilon_n = (1 + \nu_n M_1)^3 \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) + (1 + \nu_n M_1)^2 \beta'_n d(\epsilon'_n, p) + (1 + \nu_n M_1) \alpha'_n d(\epsilon_n, p)$ . Debido a que  $\{\epsilon_n\}$ ,  $\{\epsilon'_n\}$  y  $\{\epsilon''_n\}$  son sucesiones acotadas en  $K$ , tenemos que

$$M_2 = \sup_{n \geq 1, x \in K} \{d(\epsilon_n, x), d(\epsilon'_n, x), d(\epsilon''_n, x)\}.$$

Por lo tanto  $M_2$  es un número finito y existe alguna constante positiva  $D$  tal que  $\varepsilon_n \leq D(\gamma'_n + \beta'_n + \alpha'_n)$ . Tomando el infimum sobre todos los  $p \in F(T)$ , obtenemos

$$d(x_{n+1}, p) \leq (1 + A_n) d(x_n, F(T)) + B_n + D(\gamma'_n + \beta'_n + \alpha'_n).$$

Ya que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \infty$ , se sigue que  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n < \infty$ . Desde C1) y Lema 3.0.1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T))$  existe.  $\square$

**Lema 2.3.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo CAT(0) y  $K$  un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación uniformemente continua y totalmente asintóticamente no expansiva, con  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \infty$  y  $F(T) \neq \emptyset$ . Sea  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$  y  $\{\gamma_n\}$  sucesiones en  $(0, 1)$  tal que,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1 - \alpha_n - \alpha'_n) > 0$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n - \beta'_n) > 0$  y  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(1 - \gamma_n - \gamma'_n) > 0$ . Sea  $\{x_n\}$  la sucesión definida por (2.2.3) tal que*

$$C1) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n < \infty \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty.$$

$$C2) \text{ Existe una constante } M_1 > 0 \text{ tal que } \zeta(r) \leq M_1 r, r \geq 0.$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, x_n) = 0$ .

**Demostración.** Para cualquier  $p \in F(T)$ , siguiendo el Lema 2.3.1 que dice  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p)$  existe. Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p) = q$ , para algún  $q \geq 0$ . Afirmamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, x_n) = 0$ . Desde  $\{x_n\}$  es acotada, entonces existe  $R > 0$  tal que  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \subset B_R(p)$  para todo  $n \geq 1$ . Utilizando (2.2.3) y Lema 1.7.4,

$$\begin{aligned}
d^2(z_n, p) &= d^2((1 - \gamma_n - \gamma'_n)x_n \oplus \gamma_n T^n x_n \oplus \gamma'_n \epsilon''_n, p) \\
&\leq \gamma_n d^2(T^n x_n, p) + (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(x_n, p) + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) \\
&\quad - \gamma_n (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(T^n x_n, x_n) \\
&\leq \gamma_n [(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n]^2 + (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(x_n, p) + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) \\
&\quad - \gamma_n (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(T^n x_n, x_n) \\
&\leq \gamma_n (1 + \nu_n M_1)^2 d^2(x_n, p) + \gamma_n \mu_n (2(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n) \\
&\quad + (1 - \gamma_n - \gamma'_n) (1 + \nu_n M_1)^2 d^2(x_n, p) + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) \\
&\quad - \gamma_n (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(T^n x_n, x_n) \\
&= (1 - \gamma'_n) (1 + \nu_n M_1)^2 d^2(x_n, p) + \gamma_n \mu_n (2(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n) + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) \\
&\quad - \gamma_n (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(T^n x_n, x_n) \\
&\leq d^2(x_n, p) + P_n \nu_n + Q_n \mu_n + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) - \gamma_n (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(T^n x_n, x_n),
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

donde  $P_n = M_1(2 + \nu_n M_1) d^2(x_n, p)$  y  $Q_n = 2(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n$ . Esto implica que

$$d^2(z_n, p) \leq d^2(x_n, p) + P_n \nu_n + Q_n \mu_n + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p) \tag{2.3.7}$$

Desde (2.3.6) tenemos,

$$\gamma_n (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(T^n x_n, x_n) \leq d^2(x_n, p) + P_n \nu_n + Q_n \mu_n - d^2(z_n, p) + \gamma'_n M_2.$$

ya que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$  y  $d(x_n, p) \leq R$  para todo  $n$ , tenemos  $\gamma_n (1 - \gamma_n - \gamma'_n) d^2(T^n x_n, x_n) < \infty$ . Por  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n (1 - \gamma_n - \gamma'_n) > 0$ , resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n x_n, x_n) = 0. \tag{2.3.8}$$

Nuevamente desde (2.2.3) y Lema 1.6.7, por lo tanto

$$\begin{aligned}
d^2(y_n, p) &\leq d^2((1 - \beta_n - \beta'_n)T^n x_n \oplus \beta_n T^n z_n \oplus \beta'_n \epsilon'_n, p) \\
&\leq \beta_n d^2(T^n z_n, p) + (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, p) + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) \\
&\quad - \beta_n (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, T^n z_n) \\
&\leq \beta_n [(1 + \nu_n M_1) d(z_n, p) + \mu_n]^2 \\
&\quad + (1 - \beta_n - \beta'_n) [(1 + \nu_n M_1) d(x_n, p) + \mu_n]^2 + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) \\
&\quad - \beta_n (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, T^n z_n) \\
&= \beta_n (1 + \nu_n M_1)^2 d^2(z_n, p) + \beta_n [2\mu_n d(z_n, p) + \mu_n^2] \\
&\quad + (1 - \beta_n - \beta'_n) [(1 + \nu_n M_1)^2 d^2(x_n, p) + Q_n \mu_n + \mu_n^2] \\
&\quad + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) - \beta_n (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, T^n z_n).
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Sustituyendo (2.3.7) en (2.3.9), tenemos que

$$\begin{aligned}
d^2(y_n, p) &\leq \beta_n (1 + \nu_n M_1)^2 [d^2(x_n, p) + P_n \nu_n + Q_n \mu_n + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p)] \\
&\quad + \beta_n [2\mu_n d(z_n, p) + \mu_n^2] \\
&\quad + (1 - \beta_n - \beta'_n) [(1 + \nu_n M_1)^2 d^2(x_n, p) + Q_n \mu_n + \mu_n^2] \\
&\quad + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) - \beta_n (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, T^n z_n) \\
&\leq (1 + \nu_n M_1)^2 d^2(x_n, p) \\
&\quad + (1 + \nu_n M_1)^2 [P_n \nu_n + Q_n \mu_n + \gamma'_n d(\epsilon''_n, p)] \\
&\quad + 2\mu_n d(z_n, p) + Q_n \mu_n + \mu_n^2 \\
&\quad + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) - \beta_n (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, T^n z_n) \\
&= (1 + \nu_n M_1)^2 d^2(x_n, p) + (1 + \nu_n M_1)^2 P_n \nu_n \\
&\quad + (1 + \nu_n M_1)^2 Q_n \mu_n + 2\mu_n d(z_n, p) + Q_n \mu_n + \mu_n^2 \\
&\quad + \gamma'_n (1 + \nu_n M_1)^2 d(\epsilon''_n, p) + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) \\
&\quad - \beta_n (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, T^n z_n) \\
&\leq d^2(x_n, p) + R_n \nu_n + S_n \mu_n \\
&\quad + \gamma'_n (1 + \nu_n M_1)^2 d(\epsilon''_n, p) + \beta'_n d(\epsilon'_n, p) \\
&\quad - \beta_n (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, T^n z_n),
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

donde  $R_n = P_n + (1 + \nu_n M_1)^2 P_n$  y  $S_n = Q_n + (1 + \nu_n M_1)^2 Q_n + 2d(z_n, p) + \mu_n$ . Esto implica

$$\beta_n (1 - \beta_n - \beta'_n) d^2(T^n x_n, T^n z_n) \leq d^2(x_n, p) - d^2(y_n, p) + R_n \nu_n + S_n \mu_n + \lambda_n M_2,$$

donde  $\lambda_n = \beta'_n + \gamma'_n (1 + \nu_n M_1)^2$ .

y por lo que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n < \infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$  y  $d(x_n, p) \leq R$  y  $d(z_n, p) \leq R$  para todo  $n$ , tenemos que  $\beta_n(1 - \beta_n - \beta'_n)d^2(T^n x_n, T^n z_n) < \infty$ . Esto implica que por  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n(1 - \beta_n - \beta'_n) > 0$  que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n x_n, T^n z_n) = 0 \quad (2.3.11)$$

De forma similar, podemos obtener que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n y_n, y_n) = 0. \quad (2.3.12)$$

Utilizando (2.1.1) y (2.2.3), obtenemos

$$\begin{aligned} d(T^n y_n, x_{n+1}) &= d(T^n y_n, T^n w_n) \leq (1 + \nu_n M_1) d(y_n, w_n) + \mu_n \\ &\leq (1 + \nu_n M_1) [\alpha_n d(y_n, T^n y_n) + \alpha'_n d(y_n, \epsilon_n)] + \mu_n, \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

y por (2.3.12), tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n y_n, x_{n+1}) = 0$ . Note que

$$\begin{aligned} d(y_n, T^n x_n) &\leq d((1 - \beta_n - \beta'_n)T^n x_n \oplus \beta_n T^n z_n \oplus \beta'_n \epsilon'_n, T^n x_n) \\ &\leq \beta_n d(T^n z_n, T^n x_n) + \beta'_n M_2 \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Por (2.3.8) y (2.3.14), tenemos  $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, T^n x_n) + d(T^n x_n, y_n) \rightarrow 0$  es  $n \rightarrow \infty$ . Por desigualdad triangular,  $d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, T^n y_n) + d(T^n y_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ , es  $n \rightarrow \infty$ . Por (2.3.8) y la uniformidad continua de  $T$ , se tiene

$$\begin{aligned} d(x_n, T x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T^{n+1} x_{n+1}) \\ &\quad + d(T^{n+1} x_{n+1}, T^{n+1} x_n) + d(T^{n+1} x_n, T x_n) \\ &\leq (2 + \nu_{n+1} M_1) d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, T^{n+1} x_{n+1}) \\ &\quad + d(T^{n+1} x_n, T x_n) + \mu_{n+1} \\ &\rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Esto completa la demostración.  $\square$

A continuación enunciamos y demostramos los respectivos teoremas de convergencia fuerte y  $\Delta$ -convergencia, con ayuda de los lemas anteriormente demostrados. Estos teoremas demuestran que para una aplicación de tipo (2.1.1), el esquema iterativo propuesto (2.2.3) converge al punto fijo de  $T$ .

**Teorema 2.3.3.** *Sea  $X, K, T, \{x_n\}$  los cuales satisfacen las hipótesis del lema 2.3.1. Entonces la sucesión  $\{x_n\}$  definida por (2.2.3) converge fuertemente a un punto fijo de  $T$  si y solo si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ , donde  $d(x, F(T)) = \inf \{d(x, p) : p \in F(T)\}$ .*

**Demostración.** La necesidad es obvia. Para demostrar lo contrario, suponga que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0.$$

Así por hipótesis  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ . Ahora, demostramos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $K$ . Con ayuda de la desigualdad  $1 + x \leq e^x, x \geq 0$ . Desde el Lemma 2.3.1,  $d(x_{n+1}, p) \leq (1 + A_n)d(x_n, p) + B_n + \varepsilon_n$ , i.e, para cualquier entero  $m \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, p) &\leq (1 + A_{n+m-1})d(x_{n+m-1}, p) + B_{n+m-1} + \varepsilon_{n+m-1} \\ &\leq e^{A_{n+m-1}}d(x_{n+m-1}, p) + B_{n+m-1} + \varepsilon_{n+m-1} \\ &\leq e^{A_{n+m-1}} [e^{A_{n+m-2}}d(x_{n+m-2}, p) + B_{n+m-2} + \varepsilon_{n+m-2}] \\ &\quad + B_{n+m-1} + \varepsilon_{n+m-1} \\ &\leq \dots \\ &\leq \left( e^{\sum_{k=n}^{\infty} A_k} \right) d(x_n, p) + \left( e^{\sum_{k=n}^{\infty} A_k} \right) \sum_{k=n}^{n+m-1} B_k \\ &\quad + \left( e^{\sum_{k=n}^{\infty} A_k} \right) \sum_{k=n}^{n+m-1} \varepsilon_k \\ &= Gd(x_n, p) + G \sum_{k=n}^{n+m-1} B_k + G \sum_{k=n}^{n+m-1} \varepsilon_k \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

donde  $G = e^{\sum_{k=n}^{\infty} A_k}$ .

desde  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ , sin perdida de generalidad, podemos asumir una subsucesión  $\{x_{n_k}\}$  de  $\{x_n\}$  y la subsucesión  $\{p_{n_k}\} \subset F(T)$  tal que  $d(x_{n_k}, p_{n_k}) \rightarrow 0$  como  $k \rightarrow \infty$ . Entonces para cualquier  $\epsilon > 0$ , entonces existe un  $k_\epsilon > 0$  tal que

$$d(x_{n_k}, p_{n_k}) < \frac{\epsilon}{6G}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} B_k < \frac{\epsilon}{6G} \quad \text{and} \quad \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{\epsilon}{6G} \tag{2.3.17}$$

para todo  $k \geq k_\epsilon$ .



Para cualquier  $m \geq 1$  y para todo  $n \geq n_k$ , por (2.3.16), tenemos

$$\begin{aligned}
d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, p_{nk}) + d(x_n, p_{nk}) \\
&\leq Gd(x_n, p_{nk}) + G \sum_{k=n_{k\epsilon}}^{\infty} B_k + G \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k \\
&\quad + Gd(x_n, p_{nk}) + G \sum_{k=n_{k\epsilon}}^{\infty} B_k + G \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k \\
&\leq 2Gd(x_n, p_{nk}) + 2G \sum_{k=n_{k\epsilon}}^{\infty} B_k + 2G \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k \\
&\leq 2G \frac{\epsilon}{6G} + 2G \frac{\epsilon}{6G} + 2G \frac{\epsilon}{6G} = \epsilon
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Esto demuestra que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $K$ . Por lo tanto, debido a la completitud de  $X$  implica que  $\{x_n\}$  debe ser convergente. Asuma que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$ . Como  $K$  es cerrado, entonces  $q \in K$ . Ahora, demostramos que  $q \in F(T)$ . Ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T)) = 0$ , obtenemos  $d(q, F(T)) = 0$ , cerradura de  $F(T)$  dado que  $q \in F(T)$ . Así  $\{x_n\}$  converge fuertemente a un punto en  $F(T)$ . Con esto queda demostrado el teorema.  $\square$

**Teorema 2.3.4.** *Sea  $X, K, T, \{x_n\}$  los cuales satisfacen las hipótesis del Lemma 2.3.2. Entonces el esquema iterativo  $\{x_n\}$  definido por (2.2.3)  $\Delta$ -converge a un punto fijo de  $T$ .*

**Demostración.** Primero demostraremos que  $w_{\Delta}(\{x_n\}) \subseteq F(T)$ . Denotamos a  $w_{\Delta}(\{x_n\}) := \cup(A\{u_n\})$  donde la union se toma sobre todas las subsucesiones  $\{u_n\}$  de  $\{x_n\}$ . Sea  $u \in w_{\Delta}(\{x_n\})$  entonces existe una subsucesión  $\{u_n\}$  de  $\{x_n\}$  tal que  $A(\{u_n\}) = \{u\}$ . Por el Lema 1.9.2 entonces existe una subsucesión  $\{v_n\}$  de  $\{u_n\}$  tal que  $\Delta - \lim_n v_n = v \in K$ . Por el Lema 1.9.4,  $\{v_n\} \in F(T)$ . Now by Lemma 2.3.1  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F(T))$  existe, así que por el Lema 1.9.3, tenemos  $u = v$ , i.e,  $w_{\Delta}(\{x_n\}) \subseteq F(T)$ .

Ahora, para demostrar que  $\{x_n\}$   $\Delta$ -converge es un punto en  $F(T)$ , es suficiente para demostrar que  $w_{\Delta}(\{x_n\})$  consiste exactamente en un punto.

Sea  $\{u_n\}$  una subsucesión de  $\{x_n\}$  con  $A(\{u_n\}) = \{u\}$ , y sea  $A(\{x_n\}) = \{x\}$  para algún  $u \in w_{\Delta}(\{x_n\}) \subseteq F(T)$  y  $\{d(x_n, v)\}$  converge. Por el Lema 1.9.3, tenemos  $x = v \in F(T)$ . Así  $w_{\Delta}(\{x_n\}) = \{x\}$ . Esto demuestra que  $\{x_n\}$  es  $\Delta$ -convergente a un punto de  $F(T)$ .  $\square$

**Teorema 2.3.5.** *Sea  $X, K, T, \{x_n\}$  los cuales satisfacen las hipótesis del Lemma 2.3.2. Si  $T^m$  es un operador semi-compacto para algún  $m \in \mathbb{N}$ , entonces la sucesión  $\{x_n\}$  converge fuertemente a un punto de  $F(T)$ .*

**Demostración.** Por el Lema 2.3.2 y la continuidad uniforme de  $T$ , se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T^n x_n) = 0$ . Debido a que  $T^n$  es semi-compacto, entonces existe una subsucesión  $\{x_{n_j}\}$  de  $\{x_n\}$  tal que  $x_{n_j} \rightarrow p \in K$ . El Lema 2.3.2 garantiza  $\lim_{n_j \rightarrow \infty} d(x_{n_j}, T x_{n_j}) = 0$  y por lo tanto  $d(p, Tp) = 0$ . Por el lema 2.3.1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p) = 0$ , ya que  $p$  es el límite fuerte de la sucesión  $\{x_n\}$  en si misma.  $\square$

## 2.4 Ejemplos Numéricos

En esta sección, proporcionamos los ejemplos numéricos para ilustrar su rendimiento y comparar la iteración propuesta con iteraciones existentes.

### 2.4.1 Ejemplo

Sea  $X := \mathbb{R}$  un espacio métrico con la métrica usual  $d$ , que también es un espacio CAT(0) completo, y  $C = [1, 999]$ . Vemos que  $C$  es un subconjunto convexo cerrado y acotado de  $X$ . Definimos una aplicación de la forma

$$Tx = \sqrt{x^2 - 8x + 40}.$$

Es fácil ver que  $T$  es  $L$ -Lipschitziana, uniformemente continua y totalmente asintóticamente no expansiva con  $F(T) = \{5\}$ .

Sea  $\alpha_n = \beta_n = \frac{n}{n+1}$  y  $\gamma_n = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y sin perturbaciones. Utilizando software matemático calculamos las iteraciones de (1.10.3), (2.2.1), (2.2.2) and (2.2.3) (Y además (2.2.3) con  $\alpha_n = 0$ ), para un punto inicial  $x_1 = 999$ . El comportamiento de convergencia de todas las iteraciones para la aproximación al punto fijo  $F(T) = \{5\}$  se muestra en la Figura 2.1.

En las Figuras 2.2 y 2.3, vemos el comportamiento de convergencia de las iteraciones anteriormente mencionadas para algún punto inicial bajo las diferentes condiciones de control.

### 2.4.2 Ejemplo

Considere  $X = \mathbb{R}^2$  equipada con la norma euclidiana. Sea  $x(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , entonces la distancia al cuadrado de  $x$  desde el origen es

N° Iteración	Mann	Mann-Híbrido	Ishikawa-Híbrido	CR-Híbrido
$x_1$	999.	999.	999.	999.
$x_2$	997.006	993.018	989.03	983.049
$x_3$	991.689	979.725	643.415	626.158
$x_4$	982.716	958.791	300.868	271.47
$x_5$	969.956	930.082	95.324	56.1376
$x_6$	953.341	893.537	7.66672	5.
$x_7$	932.836	849.119	5.00023	5.
$x_8$	908.416	796.811	5.00006	5.

Tabla 2.1: Valores obtenidos en el ejemplo (2.4.1) para distintos procesos iterativos en el caso de  $\alpha_n = \beta_n = \frac{n}{n+1}$  y  $\gamma_n = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

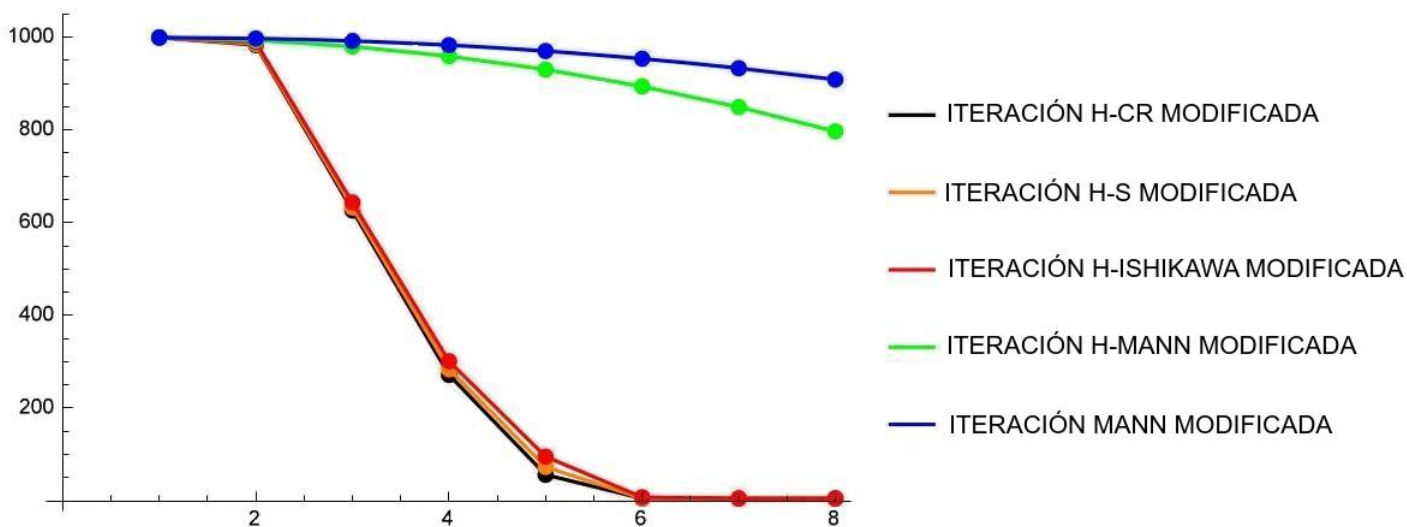


Figura 2.1: Gráfica del comportamiento de convergencia en el ejemplo (2.4.1) para distintos procesos iterativos en el caso de  $\alpha_n = \beta_n = \frac{n}{n+1}$  y  $\gamma_n = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Considere  $K$  como el disco unitario cerrado:

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

que está acotado, cerrado y convexo en  $X$ . Definimos una aplicación de la forma  $\text{Rot}_\theta : K \rightarrow K$  por:

$$\text{Rot}_\theta(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

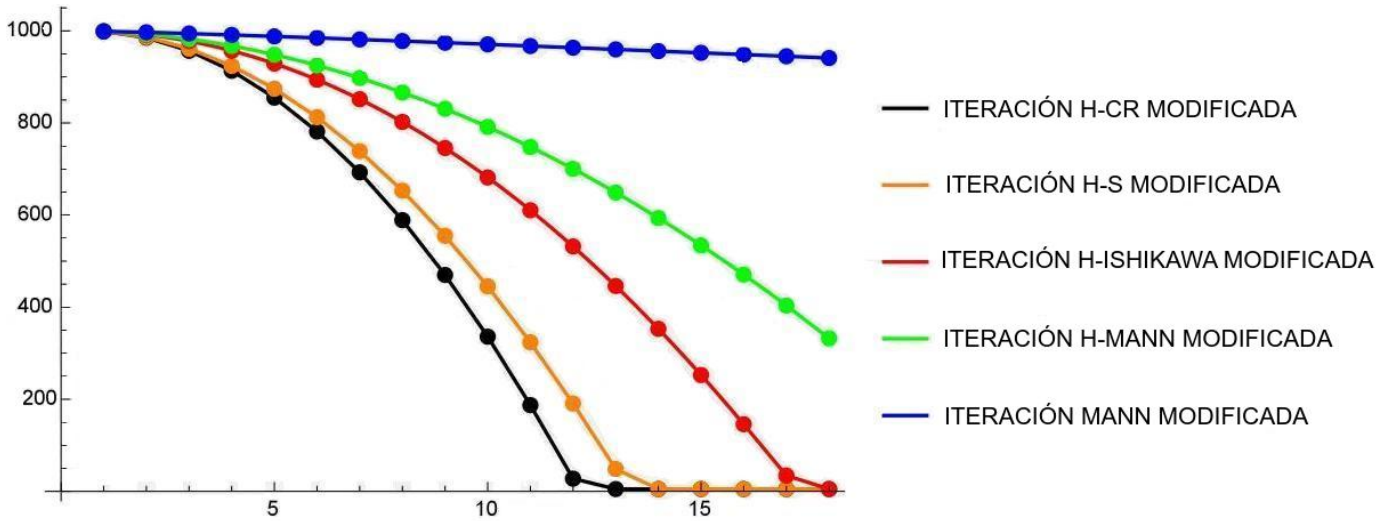


Figura 2.2: Gráfica del comportamiento de convergencia en el ejemplo (2.4.1) para distintos procesos iterativos en el caso de  $\alpha_n = \beta_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  y  $\gamma_n = \frac{1}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

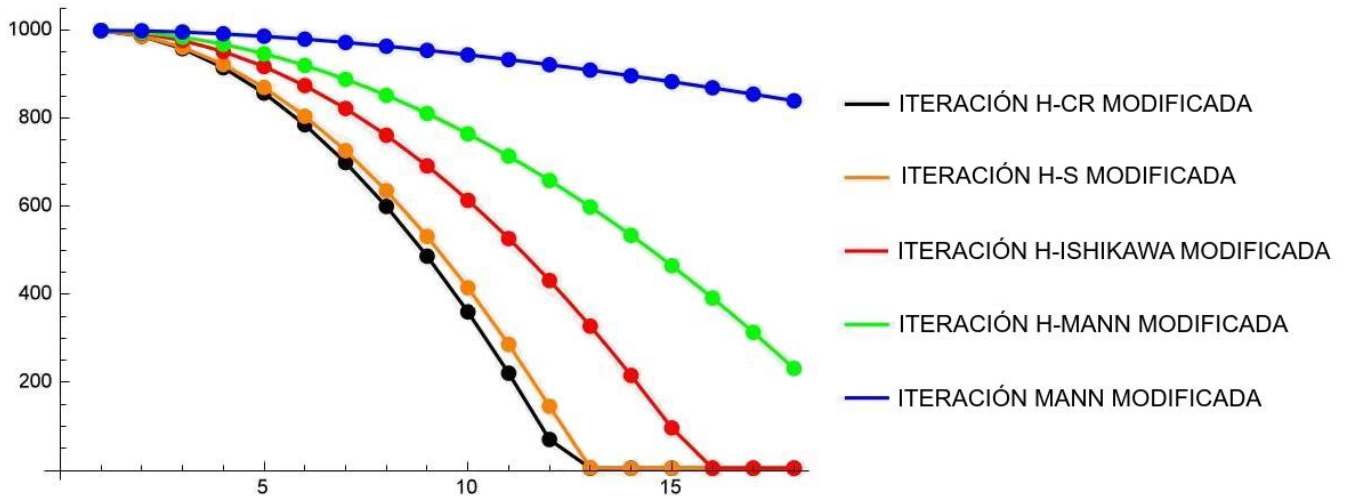


Figura 2.3: Gráfica del comportamiento de convergencia en el ejemplo (2.4.1) para distintos procesos iterativos en el caso de  $\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$  y  $\gamma_n = \frac{n}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , nuestro algoritmo es el siguiente:

$$\begin{cases} x_{(n+1)} = \begin{pmatrix} 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \\ (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix} w_{(n)} \\ w_{(n)} = (1 - \alpha_n) y_{(n)} + \alpha_n \begin{pmatrix} 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \\ (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix} y_{(n)} \\ y_{(n)} = (1 - \beta_n) \begin{pmatrix} 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \\ (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix} x_{(n)} + \beta_n \begin{pmatrix} 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \\ (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix} z_{(n)} \\ z_{(n)} = (1 - \gamma_n) x_{(n)} + \gamma_n \begin{pmatrix} 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \\ (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}} & 2^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix} x_{(n)} \end{cases}$$

Error	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{8}$	$\theta = \frac{\pi}{14}$
$\ x_{(1)}^2\ $	353.553	353.553	353.553
$\ x_{(2)}^2\ $	312.684	342.933	350.055
$\ x_{(3)}^2\ $	200.42	308.158	338.135
$\ x_{(4)}^2\ $	68.5979	246.782	315.054
$\ x_{(5)}^2\ $	6.66271	168.598	280.081
$\ x_{(6)}^2\ $	2.65704	93.4389	235.044
$\ x_{(7)}^2\ $	1.8949	40.062	184.281
$\ x_{(8)}^2\ $	1.75554	13.4935	133.676
$\ x_{(9)}^2\ $	1.75554	4.38678	88.9765
$\ x_{(10)}^2\ $	1.63583	1.76351	54.0581
$\ x_{(11)}^2\ $	1.23427	0.921586	29.9896
$\ x_{(12)}^2\ $	0.666829	0.600032	15.3399
$\ x_{(13)}^2\ $	0.293425	0.461712	7.39926
$\ x_{(14)}^2\ $	0.167443	0.400777	3.48589
$\ x_{(15)}^2\ $	0.130935	0.377136	1.6708

Tabla 2.2: Valores numéricos del ejemplo (2.4.2) para  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$  y  $\frac{\pi}{14}$

Es fácil ver que  $\text{Rot}_\theta$  es no expansivo, ya que para todo  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in K$  y  $R_\theta$  es una aplicación totalmente asintóticamente no expansivo. Claramente, el cero es el único punto fijo de la aplicación.

Sea  $\alpha_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  y  $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  sin perturbaciones. Utilizando Software Matemático calculamos las iteraciones para (2.2.3) para un punto inicial  $x_{(1)} = (250, 250)$  para  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$  y  $\frac{\pi}{14}$ . El comportamiento de convergencia de todas las iteraciones para aproximar el punto fijo  $(0, 0)$  se muestra en las Figura 2.4.

### 2.4.3 Ejemplo

Aquí reconsideramos el ejemplo 2.4.1, en el caso de  $\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$  y  $\gamma_n = \frac{n}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  donde consideramos una versión con perturbaciones dadas por  $\alpha'_n = \beta'_n = \gamma'_n = n^{-5}$  y  $\epsilon_n = \epsilon'_n = \epsilon''_n = \frac{(n+1)n^3}{2^n} - 16$ . Figura (2.5)

### 2.4.4 Ejemplo

Aquí reconsideramos el ejemplo 2.4.2, con los mismos valores de  $\alpha_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  y  $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y con perturbaciones dadas por  $\alpha'_n = \beta'_n = \gamma'_n = n^{-5}$  y  $\epsilon_n = \epsilon'_n = \epsilon''_n = \frac{(n+1)n^3}{2^n} - 16$  Utilizando Software Matemático calculamos las iteraciones para

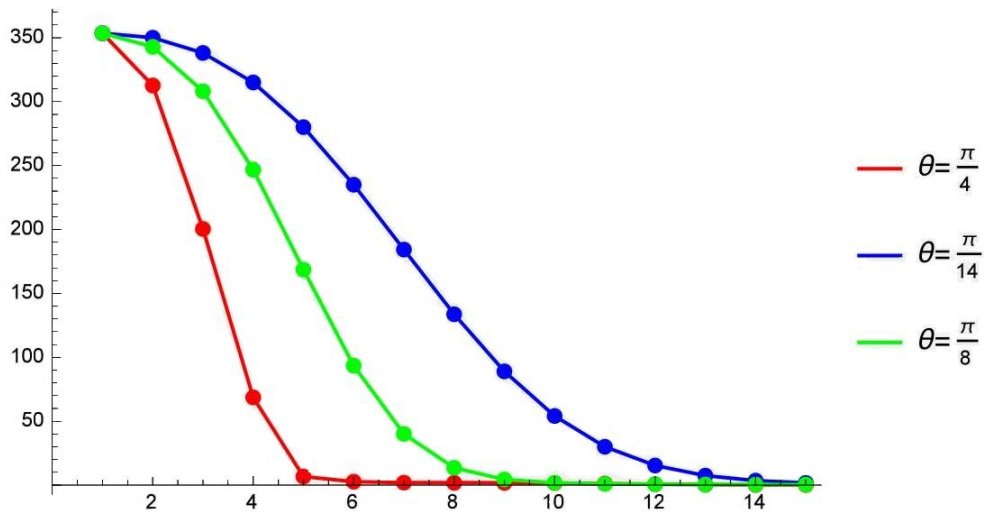


Figura 2.4: Gráfica del comportamiento de convergencia en el ejemplo (2.4.2) para  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$  y  $\frac{\pi}{14}$  en el caso de  $\alpha_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  y  $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

(2.2.3) para un punto inicial  $x_{(1)} = (250, 250)$  para  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$  y  $\frac{\pi}{14}$ . El comportamiento de convergencia de todas las iteraciones para aproximar el punto fijo  $(0, 0)$  se da en la Figura 2.6, donde comparamos los esquemas iterativos con perturbaciones y sin perturbaciones.

N° Iteración	CR Híbrido	CR Híbrido Perturbado
$x_1$	999.	999.
$x_2$	986.26	954.314
$x_3$	961.306	928.714
$x_4$	924.316	891.707
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{11}$	332.015	299.626
$x_{12}$	200.602	168.44
$x_{13}$	59.5073	29.2372
$x_{14}$	5.	5.

Tabla 2.3: Valores obtenidos para la iteración híbrida CR con perturbaciones y sin perturbaciones bajo las condiciones propuestas del ejemplo 2.4.3.

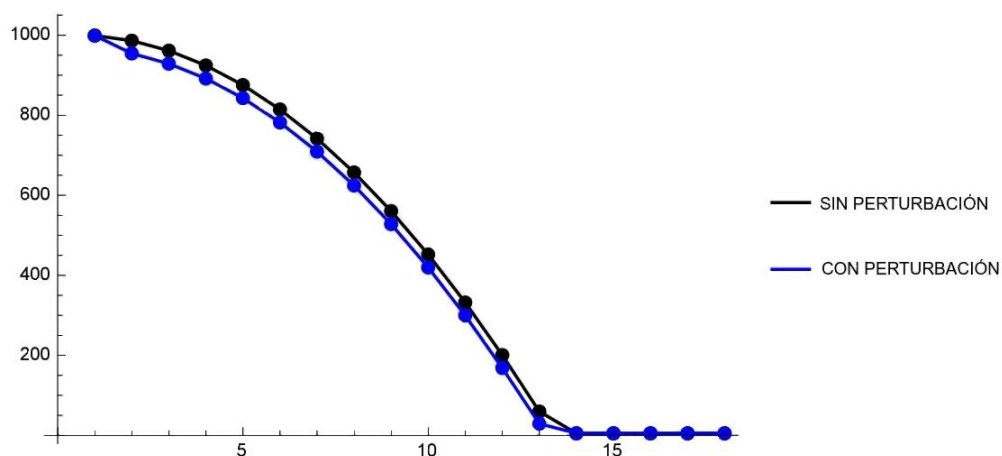


Figura 2.5: Gráfica del comportamiento de convergencia en el ejemplo (2.4.3) para  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$  y  $\frac{\pi}{14}$  en el caso de  $\alpha_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  y  $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

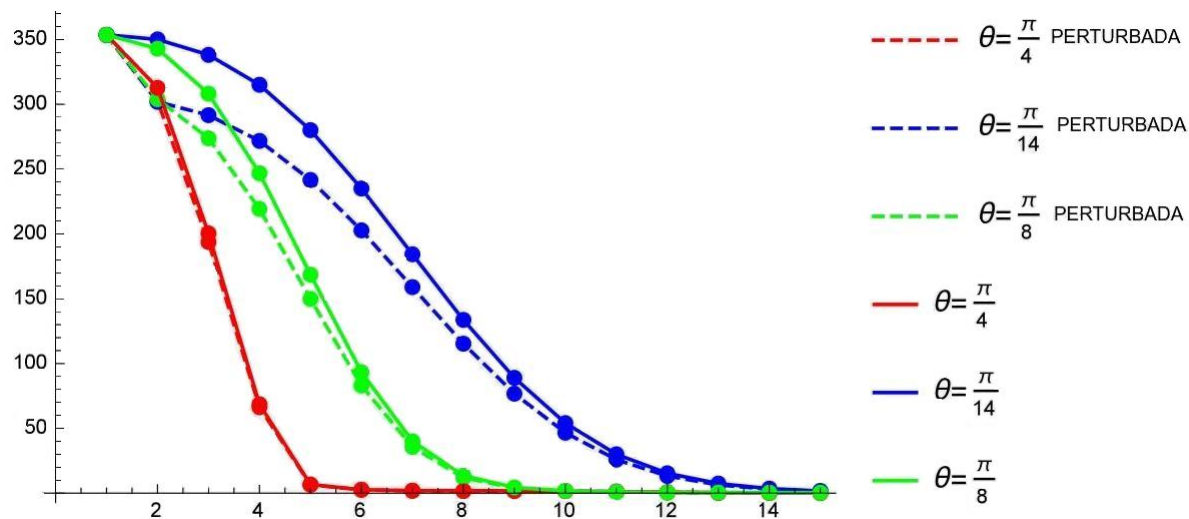


Figura 2.6: Gráfica del comportamiento de convergencia bajo las condiciones del ejemplo (2.4.4)

# CAPÍTULO 3

---

## APROXIMACIONES PERTURBADAS PARA APLICACIONES NO EXPANSIVAS EN ESPACIOS MÉTRICOS $CAT(0)$ GENERALIZADOS

En esta sección escribimos los resultados obtenidos en cuanto la  $\Delta$ -convergencia y convergencia fuerte para aplicaciones no expansivas por medio de un algoritmo modificado con perturbaciones, para este algoritmo nos basamos en la  $S$ -Iteración, propuesta por R.P Agarwal, Donal O'Regan y D.R Sahu ([55]), además esta aproximación esta enmarcada en los espacios  $CAT_p(0)$  los cuales fueron descritos en capitulos anteriores.

En los resultados principales usamos el siguiente Lema.

**Lema 3.0.1** ([43]). *Suponga que  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones de números reales no negativas tal que  $a_{n+1} \leq a_n + b_n$  para todo  $n \geq N_0$ , fijando  $N_0$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe.*

### 3.1 $\Delta$ -Convergencia y Convergencia Fuerte

Modificamos el proceso iterativo dado por (1.10.10) adaptándolo a espacios métricos  $CAT_p(0)$ . Nosotros introducimos una perturbación en el esquema iterativo. Considere  $(X, d)$  un espacio métrico completo  $CAT_p(0)$  y  $K$  un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación no expansiva. Fije  $x_0 \in K$ . Considere el esquema iterativo  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  definido por

$$\begin{cases} z_n = T_3 x_n, \\ y_n = (1 - \beta_n - \beta'_n)x_n \oplus \beta_n T_2 z_n \oplus \beta'_n \epsilon'_n, \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n - \gamma'_n)T_2 x_n \oplus \gamma_n T_1 y_n \oplus \gamma'_n \epsilon_n, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

para  $n \geq 1$ , donde  $\{\epsilon_n\}$  y  $\{\epsilon'_n\}$  son sucesiones acotadas en  $K$  y  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{\gamma'_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\beta'_n\}_{n=1}^{\infty}$  son sucesiones apropiadas de números reales  $[0, 1]$ .



**Lema 3.1.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo  $\text{CAT}_p(0)$ , con  $p \geq 2$ . Sea  $K$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo de  $X$  y  $T_1, T_2, T_3 : K \rightarrow K$  tres aplicaciones no expansivas. Tal que  $\Omega = F(T_1) \cap F(T_2) \cap F(T_3) \neq \emptyset$ . Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión definida por (3.1.1) tal que

$$C1) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n < \infty.$$

$$C2) 0 < \gamma \leq \beta_n \leq \beta_n + \beta'_n \leq \beta < 1.$$

$$C3) \gamma \leq \gamma_n + \gamma'_n.$$

Entonces lo siguiente es verdadero:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*)$  existe, para cualquier punto fijo  $x^*$  de  $T$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T_i x_n) = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ , i.e.,  $\{x_n\}$  es una sucesión aproximada de puntos fijos de  $T_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

**Demostración.** Sea  $x^* \in \Omega$ . Utilizando el Lema 1.7.4, tenemos

$$d(z_n, x^*) = d(T_3 x_n, x^*) \leq d(x_n, x^*),$$

$$\begin{aligned} d(y_n, x^*) &= d((1 - \beta_n - \beta'_n)x_n \oplus \beta_n T_2 z_n \oplus \beta'_n \varepsilon'_n, x^*) \\ &\leq (1 - \beta_n - \beta'_n)d(x_n, x^*) + \beta_n d(T_2 z_n, x^*) + \beta'_n d(\varepsilon'_n, x^*) \\ &\leq (1 - \beta'_n)d(x_n, x^*) + \beta'_n d(\varepsilon'_n, x^*) \\ &\leq d(x_n, x^*) + \beta'_n d(\varepsilon'_n, x^*) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x^*) &= d((1 - \gamma_n - \gamma'_n)T_2 x_n \oplus \gamma_n T_1 y_n \oplus \gamma'_n \varepsilon_n, x^*) \\ &\leq (1 - \gamma_n - \gamma'_n)d(T_2 x_n, x^*) + \gamma_n d(T_1 y_n, x^*) + \gamma'_n d(\varepsilon_n, x^*) \\ &\leq (1 - \gamma_n - \gamma'_n)d(x_n, x^*) + \gamma_n d(y_n, x^*) + \gamma'_n d(\varepsilon_n, x^*) \\ &\leq (1 - \gamma'_n)d(x_n, x^*) + \gamma_n \beta'_n d(\varepsilon'_n, x^*) + \gamma'_n d(\varepsilon_n, x^*) \\ &\leq d(x_n, x^*) + \gamma_n \beta'_n d(\varepsilon'_n, x^*) + \gamma'_n d(\varepsilon_n, x^*), \end{aligned}$$

para cualquier  $n \geq 1$ . Lemma 3.0.1 implica la conclusión de (i).

Ahora demostramos (ii). Considere el conjunto  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = m$ . Está claro que si  $m = 0$ , entonces (ii) es verdadero. De lo contrario asumimos  $m > 0$ . Demostremos que

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x^*) = m$ . Por lo tanto, tenemos

$$d(x_{n+1}, x^*) \leq (1 - \gamma_n - \gamma'_n)d(x_n, x^*) + \gamma_n d(y_n, x^*) + \gamma'_n d(\varepsilon_n, x^*),$$

lo que implica

$$(\gamma_n + \gamma'_n)d(x_n, x^*) \leq \gamma_n d(y_n, x^*) + d(x_n, x^*) - d(x_{n+1}, x^*) + \gamma'_n d(\varepsilon_n, x^*)$$

ó

$$\begin{aligned} d(x_n, x^*) &\leq \frac{\gamma_n}{\gamma_n + \gamma'_n} d(y_n, x^*) + \frac{1}{\gamma_n + \gamma'_n} [d(x_n, x^*) - d(x_{n+1}, x^*)] + \frac{\gamma'_n}{\gamma_n + \gamma'_n} d(\varepsilon_n, x^*) \\ &\leq d(y_n, x^*) + \frac{1}{\gamma} [d(x_n, x^*) - d(x_{n+1}, x^*)] + \frac{\gamma'_n}{\gamma} d(\varepsilon_n, x^*), \end{aligned}$$

para cualquier  $n \geq 1$ . Por consiguiente

$$\begin{aligned} m &= \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x^*) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma} [d(x_n, x^*) - d(x_{n+1}, x^*)] + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma'_n}{\gamma} d(\varepsilon_n, x^*) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x^*). \end{aligned}$$

De manera similar, demostramos que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x^*) \leq m$ , lo que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x^*) = m.$$

Por lo tanto de igual forma, tenemos

$$\begin{aligned} d(y_n, x^*) &= d((1 - \beta_n - \beta'_n)x_n \oplus \beta_n T_2 z_n \oplus \beta'_n \varepsilon'_n, x^*) \\ &\leq (1 - \beta_n - \beta'_n)d(x_n, x^*) + \beta_n d(T_2 z_n, x^*) + \beta'_n d(\varepsilon'_n, x^*) \\ &\leq (1 - \beta_n - \beta'_n)d(x_n, x^*) + \beta_n d(z_n, x^*) + \beta'_n d(\varepsilon'_n, x^*), \end{aligned}$$

lo cual implica,

$$(\beta_n + \beta'_n)d(x_n, x^*) \leq (d(x_n, x^*) - d(y_n, x^*)) + \beta_n d(z_n, x^*) + \beta'_n d(\varepsilon'_n, x^*),$$

ó

$$\begin{aligned} d(x_n, x^*) &\leq \frac{1}{\beta_n + \beta'_n} (d(x_n, x^*) - d(y_n, x^*)) + \frac{\beta_n}{\beta_n + \beta'_n} d(z_n, x^*) + \frac{\beta'_n}{\beta_n + \beta'_n} d(\varepsilon'_n, x^*) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} (d(x_n, x^*) - d(y_n, x^*)) + d(z_n, x^*) + \frac{\beta'_n}{\gamma} d(\varepsilon'_n, x^*), \end{aligned}$$

y  $m = \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(z_n, x^*)$ . de manera similar  $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(z_n, x^*) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = m$ . Así  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, x^*) = m$ . Esto demuestra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) = 0. \quad (3.1.2)$$

Por otra parte utilizando el Lema 1.7.4, tenemos

$$\begin{aligned} d^p(y_n, x^*) &= d^p((1 - \beta_n - \beta'_n)x_n \oplus \beta_n T_2 z_n \oplus \beta'_n \varepsilon'_n, x^*) \\ &\leq (1 - \beta_n - \beta'_n) d^p(x_n, x^*) + \beta_n d^p(T_2 z_n, x^*) + \beta'_n d^p(\varepsilon'_n, x^*) \\ &\quad - \frac{\beta_n(1 - \beta_n - \beta'_n)}{2^{p-1}} d^p(x_n, T_2 z_n) \\ &\leq d^p(x_n, x^*) + \beta'_n d^p(\varepsilon'_n, x^*) - \frac{\beta_n(1 - \beta_n - \beta'_n)}{2^{p-1}} d^p(x_n, T_2 z_n) \end{aligned}$$

Ya que  $\{\beta_n, \beta_n + \beta'_n\} \subset [\gamma, \beta]$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(1 - \beta)}{2^{p-1}} d^p(x_n, T_2 z_n) &\leq \frac{\beta_n(1 - \beta_n - \beta'_n)}{2^{p-1}} d^p(x_n, T_2 z_n) \\ &\leq \beta'_n d^p(\varepsilon'_n, x^*) + d^p(x_n, x^*) - d^p(y_n, x^*), \end{aligned}$$

lo que implica,

$$d^p(x_n, T_2 z_n) \leq \frac{2^{p-1}}{\gamma(1 - \beta)} \left[ \beta'_n d^p(\varepsilon'_n, x^*) + d^p(x_n, x^*) - d^p(y_n, x^*) \right],$$

para cualquier  $n \geq 1$ . Está claro que nuestros resultados anteriores forzarán

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T_2 z_n) = 0. \quad (3.1.3)$$

Siguiendo de (3.1.3) y (3.1.2) que

$$d(x_n, T_2 x_n) \leq d(x_n, T_2 z_n) + d(T_2 z_n, T_2 x_n) \leq d(x_n, T_2 z_n) + d(z_n, x_n) \rightarrow 0.$$

Utilizando argumentos similares,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T_1 x_n) = 0$ , lo que completa la demostración del Lemma 3.1.1.  $\square$

### Observación 3.1.1.

1. Desde [47], se sabe que  $T$  es un operador no expansivo, entonces  $T$  tiene un conjunto no vacío de puntos fijos  $F(T)$ . Si  $T_1 = T_2 = T_3 = T$  en el Lema 3.1.1, entonces obtenemos que  $\Omega = F(T)$ .
2. Podemos demostrar el Lema 3.1.1 en el contexto de operadores cuasi no expansivos con algunos cambios adecuados. Además, es fácil demostrar el Lemma 3.1.1 combinando operadores no expansivos con operadores cuasi no expansivos.

**Teorema 3.1.2.** Sea  $X, K, T_1, T_2, T_3, \{x_n\}$  los cuales satisfacen las hipotesis del Lema 3.1.1. Entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  definida por (3.1.1)  $\Delta$ -converge al punto fijo de  $\Omega$ .

**Demostración.** Por Lema 3.1.1, sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T_i x_n) = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*)$  existe, para cualquier  $x^* \in \Omega$ . Por lo tanto  $\{x_n\}$  es acotada. Primero demostraremos que  $w_{\Delta}(x_n) \subseteq \Omega$ , donde  $w_{\Delta}(x_n)$  es el conjunto de los centros asintóticos de todas las subsucesiones de  $\{x_n\}$ . Sea  $u \in w_{\Delta}(x_n)$ , entonces existe una subsucesión  $\{u_n\}$  de  $\{x_n\}$  tal que  $A(\{u_n\}) = \{u\}$ . Por Lemma 1.9.2, existe una subsucesión  $\{v_n\}$  de  $\{u_n\}$  tal que  $\Delta - \lim_n v_n = v \in K$ . Por el Lema 1.9.2,  $v \in \Omega$ . De nuevo, desde el Lema 3.1.1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, v)$  existe. Ahora afirmamos que  $u = v$ . Supongamos lo contrario, que  $u \neq v$ . Entonces, por la unicidad de los centros asintóticos tenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, u) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u) \\ &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, v) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) \end{aligned} .$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $u = v \in \Omega$  y por consiguiente  $w_{\Delta}(x_n) \subseteq \Omega$ . Para demostrar que  $\{x_n\}$   $\Delta$ -converge a un punto fijo de  $T$ , demostraremos que  $w_{\Delta}(x_n)$  consiste exactamente en un punto. Sea  $\{u_n\}$  una subsucesión de  $\{x_n\}$ . Por Lemma 1.9.2, existe una subsucesión  $\{v_n\}$  de  $\{u_n\}$  tal que  $\Delta - \lim_n v_n = v \in K$ . Sea  $A(\{u_n\}) = \{u\}$  y  $A(\{x_n\}) = \{x\}$ . Ya hemos visto que  $u = v$  y  $v \in \Omega$ . Finalmente, afirmamos que  $x = v$ . Si no, entonces la existencia de  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, v)$  y la unicidad de los centros asintóticos implican que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) \\ &< \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v). \end{aligned}$$

De nuevo, esto es una contradicción, por lo tanto  $x = v \in \Omega$ . De aquí  $w_{\Delta}(x_n) = \{x\}$ .  $\square$

**Teorema 3.1.3.** Sea  $X, K, T_1, T_2, T_3, \{x_n\}$  los cuales satisfacen las hipotesis del Lema 3.1.1. Entonces la sucesión  $\{x_n\}$  definida por (3.1.1).

- i)  $\Delta$ -converges a un punto fijo de  $\Omega$ .
- ii) converge fuertemente a un punto fijo de  $T$  si y solo si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \Omega) = 0$ , donde  $d(x, \Omega) = \inf \{d(x, x^*) : x^* \in \Omega\}$ .

**Demostración.** La necesidad es obvia. Para demostrar lo contrario, suponemos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \Omega) = 0.$$

Así por hipótesis  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \Omega) = 0$ . A continuación, demostramos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $K$ . Sea  $\epsilon > 0$  el cual se elige arbitrariamente. Ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \Omega) = 0$ , existe un entero positivo  $n_0$  tal que

$$d(x_n, \Omega) < \frac{\epsilon}{4}, \forall n \geq n_0.$$

En particular,  $\inf\{d(x_{n_0}, x^*) : x^* \in \Omega\} < \frac{\epsilon}{4}$ . Por lo tanto debe existir  $x^{**} \in \Omega$  tal que

$$d(x_{n_0}, x^{**}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora, para todo  $m, n \geq n_0$ , tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x^{**}) + d(x^{**}, x_n) \\ &\leq 2d(x_{n_0}, x^{**}) \\ &\leq 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $K$ . Por lo tanto debido a la completitud de  $X$  implica que  $\{x_n\}$  debe ser convergente. Puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \Omega) = 0$ , tenemos  $d(x^*, \Omega) = 0$ , cerradura de  $\Omega$  dado que  $x^* \in \Omega$ . Así  $\{x_n\}$  converge fuertemente a un punto en  $\Omega$ . Esto completa la demostración.  $\square$

## 3.2 Algoritmo de punto proximal en espacios CAT(0).

Recordamos que una función  $f : C \rightarrow (-\infty, \infty]$  definida en un subconjunto  $C$  de un espacio CAT(0) es convexo si, para cualquier geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ , la función  $f \circ \gamma$  es convexa. Decimos que una función  $f$  definida en  $C$  es *semicontinua inferior en un punto*  $x \in C$  si  $f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ , para cada secuencia  $x_n \rightarrow x$ . Se dice que una función  $f$  es *semicontinua inferior* en  $C$  si es semicontinua inferior en cualquier punto de  $C$ .

Para cualquier  $\lambda > 0$ , definido el resolvente *Moreau-Yosida* en espacios métricos CAT(0)

$$J_\lambda(x) = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left[ f(y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x) \right],$$

para todo  $x \in X$ . Originalmente, esta definición fue dada por Moreau [31]. El operador  $J_\lambda$  esta bien definido para todo  $\lambda > 0$  (ver [30, 76]).

Sea  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función convexa y semicontinua inferior adecuada. Se demostró en [17] que el conjunto  $F(J_\lambda)$  de puntos fijos del resolvente asociado con  $f$  coincide con el conjunto  $\operatorname{argmin}_{y \in X} f(y)$  de minimizadores de  $f$ .

**Lema 3.2.1.** [30] *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo  $CAT(0)$  y  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  convenientemente elegida convexa y semicontinua inferior, para cualquier  $\lambda > 0$ , el resolvente  $J_\lambda$  de  $f$  es no expansivo.*

Tomando  $T_3 = J_{\lambda_n}$  en la iteración (3.1.1), obtenemos el siguiente resultado en espacios métricos  $CAT(0)$  como consecuencia directa del Teorema 3.1.2.

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo  $CAT(0)$ . Sea  $K$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo de  $X$  y  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  convenientemente elegida convexa y inferiormente semicontinua. Sea  $T_1, T_2 : K \rightarrow K$  dos aplicaciones no expansivas tal que  $\Omega = F(T_1) \cap F(T_2) \cap \operatorname{argmin}_{y \in X} f(y) \neq \emptyset$ . Let  $\{x_n\}$  la sucesión definida por*

$$\begin{cases} z_n = J_{\lambda_n} x_n, \\ y_n = (1 - \beta_n - \beta'_n)x_n \oplus \beta_n T_2 z_n \oplus \beta'_n \varepsilon'_n, \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n - \gamma'_n)T_2 x_n \oplus \gamma_n T_1 y_n \oplus \gamma'_n \varepsilon_n, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

para  $n \geq 1$ , donde  $\{\varepsilon_n\}$  y  $\{\varepsilon'_n\}$  son sucesiones acotadas en  $K$  y  $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\gamma'_n\}_{n=1}^\infty$  y  $\{\beta'_n\}_{n=1}^\infty$  son sucesiones reales apropiadas en  $[0, 1]$  y  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión en  $\mathbb{R}$  tal que

$$C1) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n < \infty.$$

$$C2) 0 < \gamma \leq \beta_n \leq \beta_n + \beta'_n \leq \beta < 1.$$

$$C3) \gamma \leq \gamma_n + \gamma'_n.$$

$$C4) \lambda_n \geq \lambda > 0, \text{ para algún } \lambda.$$

Entonces la sucesión  $\{x_n\}$  definida por (3.2.1)  $\Delta$ -converge a un punto de  $\Omega$ .

El teorema 3.2.2 amplía los resultados de Cholamjiak et al. [54] en espacios  $CAT(0)$ . De hecho, presentamos un nuevo algoritmo de punto proximal perturbado para resolver el problema de minimización convexa así como el problema de punto fijo de aplicaciones no expansivos en espacios  $CAT(0)$ .

### 3.3 Algoritmo de punto proximal en espacios $\text{CAT}(\kappa)$ .

Como se mencionó en los preliminares para un número real  $\kappa$ , un espacio  $\text{CAT}(\kappa)$  se define como un espacio geodésico  $(X, d)$  cuyo triángulo geodésico es suficientemente más *delgado* que el triángulo de comparación correspondiente en un espacio modelo con curvatura  $\kappa$ . En 2003, Kirk [85] demostró por primera vez la existencia de puntos fijos para aplicaciones no expansivas en un espacio  $\text{CAT}(\kappa)$  para  $\kappa \geq 0$ . Dado que muchos resultados y conceptos básicos en  $\text{CAT}(\kappa)$  se pueden deducir de los de los espacios  $\text{CAT}(1)$ , ahora indicamos suficientemente los lemas y definiciones útiles en los espacios  $\text{CAT}(1)$ . A lo largo de esta sección, suponemos que  $X$  es un espacio  $\text{CAT}(1)$  admisible, es decir  $d(x, y) < \frac{\pi}{2}$ , para todo  $x, y \in X$ .

Sea  $(X, d)$  un espacio  $\text{CAT}(1)$ . Sea  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función convenientemente elegida convexa e inferiormente semicontinua. Para cualquier  $\lambda > 0$ , se define el resolvente *Kimura-Kohsaka* de  $f$  (ver [93, 94]) en espacios  $\text{CAT}(1)$  es

$$R_\lambda(x) = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left[ f(y) + \frac{1}{\lambda} \tan d(y, x) \sin d(y, x) \right],$$

para todo  $x \in X$ . La aplicación  $R_\lambda$  esta bien definida para todo  $\lambda > 0$  (ver [93, 94]) y el conjunto  $F(R_\lambda)$  de puntos fijos del resolvente asociado con  $f$  coincide con el conjunto  $\operatorname{argmin}_{y \in X} f(y)$  de minimizadores de  $f$ .

**Lema 3.3.1.** [94] *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico admisible  $\text{CAT}(1)$  y  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una función convenientemente elegida convexa e inferiormente semicontinua. Para cualquier  $\lambda > 0$ , el resolvente  $R_\lambda$  de  $f$  es cuasi-no expansiva.*

Tomando  $T_3 = R_{\lambda_n}$  en la iteración dada por (3.1.1), obtenemos el siguiente resultado en espacios métricos  $\text{CAT}(0)$  como consecuencia directa del Teorema 3.1.2 y observación 3.1.1.

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico admisible  $\text{CAT}(1)$ . Sea  $K$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo de  $X$  y  $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  convenientemente elegida convexa e inferiormente semicontinua. Sea  $T_1, T_2 : K \rightarrow K$  dos aplicaciones cuasi-no expansivas tal que  $\Omega = F(T_1) \cap F(T_2) \cap \operatorname{argmin}_{y \in X} f(y) \neq \emptyset$ . Let  $\{x_n\}$  la sucesión definida por*

$$\begin{cases} z_n = R_{\lambda_n} x_n, \\ y_n = (1 - \beta_n - \beta'_n)x_n \oplus \beta_n T_2 z_n \oplus \beta'_n \varepsilon'_n, \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n - \gamma'_n)T_2 x_n \oplus \gamma_n T_1 y_n \oplus \gamma'_n \varepsilon_n, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

para  $n \geq 1$ , donde  $\{\epsilon_n\}$  y  $\{\epsilon'_n\}$  son sucesiones acotadas en  $K$  y  $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\gamma'_n\}_{n=1}^\infty$  y  $\{\beta'_n\}_{n=1}^\infty$  son sucesiones reales apropiadas en  $[0, 1]$  y  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión en  $\mathbb{R}$  tal que

$$C1) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n < \infty.$$

$$C2) 0 < \gamma \leq \beta_n \leq \beta_n + \beta'_n \leq \beta < 1.$$

$$C3) \gamma \leq \gamma_n + \gamma'_n.$$

$$C4) \lambda_n \geq \lambda > 0, \text{ para algún } \lambda.$$

Entonces la sucesión  $\{x_n\}$  definida por (3.3.1)  $\Delta$ -converge a un punto de  $\Omega$ .

El teorema 3.3.2 también es válido para  $T_1, T_2 : K \rightarrow K$  las cuales son dos aplicaciones no expansivas y, en este sentido, el teorema 3.3.2 amplía los resultados realizados por Pakkaranang et al. [52, 53] en espacios  $\text{CAT}(1)$  para aplicaciones cuasi no expansivas. De hecho, presentamos un nuevo algoritmo de punto proximal perturbado para resolver el problema de minimización convexa, así como el problema de punto fijo de aplicaciones no expansivas en espacios  $\text{CAT}(1)$ . Se puede deducir una versión para  $\kappa > 0$  siguiendo [52].

### 3.4 Punto fijo en aplicaciones $\alpha$ no expansivas

Inspirados por Goebel y Japón Pineda mencionamos la siguiente definición en espacios de Banach [36],

**Definición 3.4.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo  $\text{CAT}_p(0)$ , con  $p \geq 2$ .  $T : X \rightarrow X$  es una aplicación medio no expansiva (o  $\alpha$ -no expansiva) si, para algún multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  con  $\alpha_1, \alpha_n > 0$ ,  $\alpha_j \geq 0$  para todo  $j$ , y  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ , tenemos

$$\bigoplus_{j=1}^n \alpha_j d(T^j x, T^j y) \leq d(x, y)$$

para todo  $x, y \in X$ .

Desde el primer coeficiente  $\alpha_1 > 0$ ,  $T$  satisface la condición Lipschitziana

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{\alpha_1} d(x, y).$$



De manera trivial,  $T_\alpha : X \rightarrow X$  definida por  $T_\alpha(x) = \bigoplus_{i=1}^n \alpha_i T^i x$  es una aplicación no expansiva.

A continuación demostraremos algunos teoremas de punto fijo para aplicaciones  $\alpha$ -nonexpansivas en espacios métricos  $\text{CAT}_p(0)$ .

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo  $\text{CAT}_p(0)$ , con  $p \geq 2$ . Sea  $K$  un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación  $\alpha$ -nonexpansiva con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tal que  $\alpha_1 > 2^{\frac{1}{1-n}}$ . Entonces el conjunto de puntos fijos de  $T$ ,  $F(T)$ , coincide con el conjunto de puntos fijos de  $T_\alpha$ ,  $F(T_\alpha)$ .*

**Demostración.** La demostración es similar a la propuesta por [16, Teorema 3.1] Trivialmente,  $F(T) \subset F(T_\alpha)$ . Para el caso contrario, podemos verificar que

$$\begin{aligned} d(T^j x, Tx) &\leq \frac{1}{\alpha_1} d(T^{j-1} x, x) \leq \frac{1}{\alpha_1} (d(T^{j-1} x, Tx) + d(Tx, x)) \\ &\leq \frac{1}{\alpha_1^2} d(T^{j-2} x, x) + \frac{1}{\alpha_1} d(Tx, x) \\ &\vdots \\ &\leq \left( \frac{1}{\alpha_1^{j-1}} + \dots + \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_1} \right) d(Tx, x), \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

para  $j = 2, \dots, n$ .

Si  $x \in F(T_\alpha)$ , entonces, por el Lema 1.7.4 y la ecuación (3.4.1),

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &= d(T_\alpha(x), Tx) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j d(T^j x, Tx) \\ &\leq \sum_{j=2}^n \alpha_j \left( \frac{1}{\alpha_1^{j-1}} + \dots + \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_1} \right) d(Tx, x) \\ &= \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_j}{\alpha_1^j} \right) d(Tx, x) \\ &\leq \frac{1 - \alpha_1^{n-1}}{\alpha_1^{n-1}} d(Tx, x) \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Puesto que  $\alpha > 2^{\frac{1}{1-n}}$ ,  $\frac{1 - \alpha_1^{n-1}}{\alpha_1^{n-1}} < 1$  y  $Tx = x$ . □

**Lema 3.4.2.** *Bajo las mismas condiciones del teorema 3.4.1. Sea  $\{x_m\}$  una sucesión acotada en  $K$ . Entonces  $d(x_m, Tx_m) \rightarrow 0$  si y solo si  $d(x_m, T_\alpha(x_m)) \rightarrow 0$  como  $m \rightarrow \infty$ .*

**Demostración.** Suponga  $d(x_m, Tx_m) \rightarrow 0$  como  $m \rightarrow \infty$ . Por (3.4.1),

$$\begin{aligned} d(T^j x_m, x_m) &\leq d(T^j x_m, Tx_m) + d(Tx_m, x_m) \\ &\leq \left( \frac{1}{\alpha_1^{j-1}} + \dots + \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_1} + 1 \right) d(Tx_m, x_m) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

como  $m \rightarrow \infty$ , para  $j = 2, \dots, n$ . para  $j = 1$  es trivial. Ahora,

$$d(T_\alpha(x_m), x_m) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j d(T^j x_m, x_m) \rightarrow 0,$$

como  $m \rightarrow \infty$ .

En caso contrario. Suponga  $d(x_m, T_\alpha(x_m)) \rightarrow 0$  como  $m \rightarrow \infty$ . Usando un procedimiento similar al utilizado en (3.4.2) tenemos,

$$\begin{aligned} d(x_m, Tx_m) &\leq d(x_m, T_\alpha(x_m)) + d(Tx_m, T_\alpha(x_m)) \\ &\leq d(x_m, T_\alpha(x_m)) + \frac{1 - \alpha_1^{n-1}}{\alpha_1^{n-1}} d(Tx_m, x_m) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

i.e.,  $d(Tx_m, x_m) \leq \left(2 - \frac{1}{\alpha_1^{n-1}}\right) d(x_m, T_\alpha(x_m)) \rightarrow 0$ , como  $m \rightarrow \infty$ . Esto completa la demostración.  $\square$

**Corolario 3.4.3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo  $\text{CAT}_p(0)$ , con  $p \geq 2$ . Sea  $K$  un subconjunto convexo y cerrado de  $X$  y  $T : K \rightarrow K$  una aplicación  $\alpha$ -nonexpansiva con  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tal que  $\alpha_1 > 2^{\frac{1}{1-n}}$ . Sea  $\{x_n\}$  Una sucesión definida por (3.1.1) tal que

$$C1) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \beta'_n < \infty.$$

$$C2) 0 < \gamma \leq \beta_n \leq \beta_n + \beta'_n \leq \beta < 1.$$

$$C3) \gamma \leq \gamma_n + \gamma'_n.$$

Entonces lo siguiente es verdadero:

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*)$  existe, para cualquier punto fijo  $x^*$  de  $T$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ , i.e.,  $\{x_n\}$  es una sucesión aproximada de punto fijo de  $T$ .

**Corolario 3.4.4.** Sea  $X, K, T, \{x_n\}$  los cuales satisfacen las hipótesis del Lema 3.4.3. Entonces la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  definida por (3.1.1)  $\Delta$ -converge al punto fijo de  $T$ .

## 3.5 Ejemplos Numéricos

En esta sección, proporcionamos los ejemplos numéricos para ilustrar el comportamiento del algoritmo propuesto.

### 3.5.1 Ejemplo

Considere  $X = \mathbb{R}^2$  equipado con la norma euclidiana. Sea  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , entonces la distancia cuadrática de  $x$  desde el origen esta dada por

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Considere  $K$  como el disco unitario cerrado:

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

que está acotado, cerrado y convexo en  $X$ . Definimos el operador  $\text{Rot}_\theta : K \rightarrow K$  por:

$$\text{Rot}_\theta(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Para  $\theta = \frac{\pi}{4}$  y  $T_1 = T_2 = T_3 = \text{Rot}_\theta$ , nuestro algoritmo es el siguiente:

$$\begin{cases} z_{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x_{(n)} \\ y_{(n)} = \begin{pmatrix} 1 - \beta_n & \beta_n \\ -\beta_n & 1 - \beta_n \end{pmatrix} x_{(n)} \\ x_{(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma_n\beta_n & 1 \\ -1 & 1 - 2\gamma_n\beta_n \end{pmatrix} x_{(n)} \end{cases}$$

es fácil ver que  $\text{Rot}_\theta$  es no expansiva. Esta claro que el cero es el único punto fijo del operador  $\text{Rot}_\theta$ . Sea  $\gamma_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  y  $\beta_n = \frac{1}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y sin perturbaciones. Utilizando software matemático realizamos la iteraciones del algoritmo (3.2.1), para un punto inicial  $x_{(1)} = (250, 250)$  y para  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$  y  $\frac{\pi}{4}$ . El comportamiento de convergencia de todas las iteraciones para la aproximación del punto fijo  $(0, 0)$  se da en la Figura 3.1 y la Tabla 3.1.

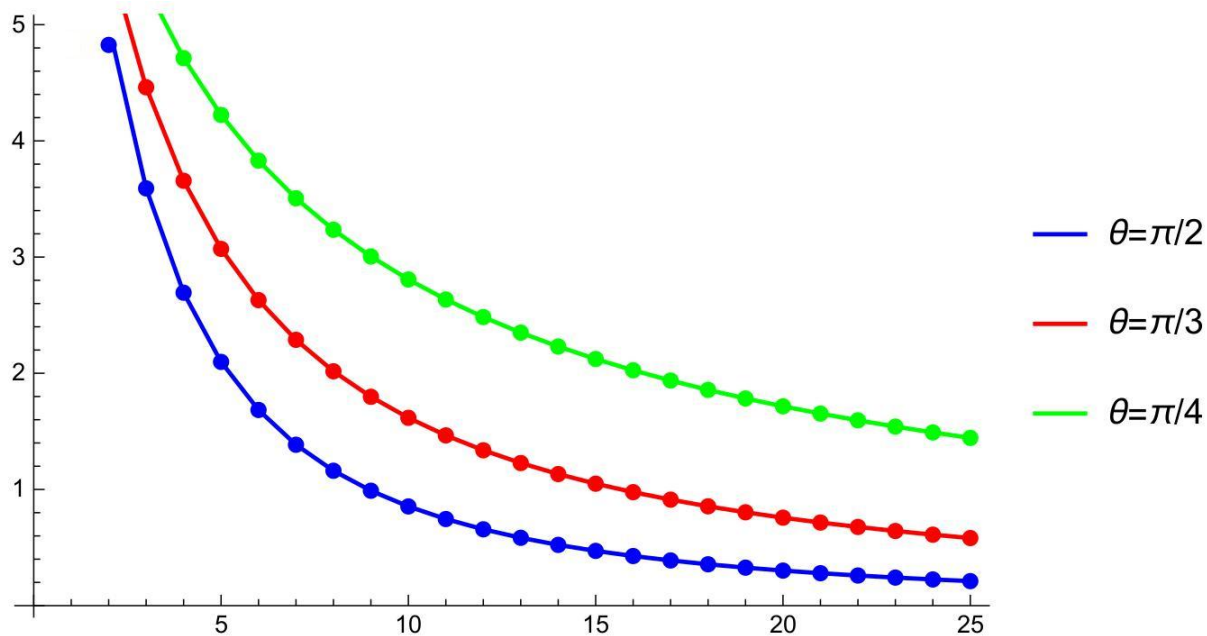


Figura 3.1: Gráfica del comportamiento de convergencia bajo las condiciones del ejemplo (3.5.1)

Error	$\theta = \pi/2$	$\theta = \pi/3$	$\theta = \pi/4$
$\ x_{(1)}^2\ $	7.07107	7.07107	7.07107
$\ x_{(3)}^2\ $	3.59117	4.46127	5.33126
$\ x_{(5)}^2\ $	2.09783	3.07041	4.2235
$\ x_{(7)}^2\ $	1.38474	2.28779	3.50592
$\ x_{(9)}^2\ $	0.988957	1.79742	3.00499
$\ x_{(11)}^2\ $	0.745293	1.4653	2.63483
$\ x_{(13)}^2\ $	0.583899	1.22732	2.34957
$\ x_{(15)}^2\ $	0.471072	1.04946	2.12257
$\ x_{(17)}^2\ $	0.388866	0.912109	1.93738
$\ x_{(19)}^2\ $	0.326979	0.80324	1.78322
$\ x_{(21)}^2\ $	0.279137	0.715097	1.65276
$\ x_{(23)}^2\ $	0.241334	0.642464	1.54085
$\ x_{(25)}^2\ $	0.210907	0.581713	1.44372

Tabla 3.1: Error de convergencia para el ejemplo 3.5.1.

### 3.5.2 Ejemplo

Considere  $X = \mathbb{R}^3$  equipada con la norma Euclidiana. Definimos el operador no expansivo  $T_1, T_2, T : X \rightarrow X$  de la siguiente manera,

$$T_1(x, y, z) = T_2(x, y, z) = T(x, y, z) = \left( \frac{1}{5}(3x - 2y - 8), \frac{1}{5}(-2x + 3y - 8), \frac{z}{2} \right).$$

Definimos  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(u) = \frac{1}{2} \|Au - b\|^2, \quad u \in \mathbb{R}^3,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (-4, -4, 4).$$

La función  $f$  convenientemente se elige convexa e inferiormente semicontinua. Por lo tanto para  $\lambda > 0$ , tenemos,

$$J_\lambda(u) = (I + \lambda A^* A)^{-1}(u + \lambda A^* b).$$

Note que

$$\Omega = \text{Fix}(T) \cap \text{argmin}_{y \in X} f(y) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 4 = z = 0\}.$$

El algoritmo (3.2.1) viene dado por:

$$\begin{cases} z_n = (I + \lambda_n A^* A)^{-1}(x_n + \lambda_n A^* b), \\ y_n = (1 - \beta_n - \beta'_n)x_n \oplus \beta_n T_2 z_n \oplus \beta'_n \varepsilon'_n, \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n - \gamma'_n)T_2 x_n \oplus \gamma_n T_1 y_n \oplus \gamma'_n \varepsilon_n, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Elegimos  $\lambda_n = 0.35$ ,  $\gamma'_n = \beta'_n = 0$ ,  $\gamma_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  y  $\beta_n = \frac{1}{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Utilizando software matemático, realizamos el computo de las iteraciones para la sucesión (3.2.1) los cuales se muestran en la Figura 3.2 y la Tabla 3.2.

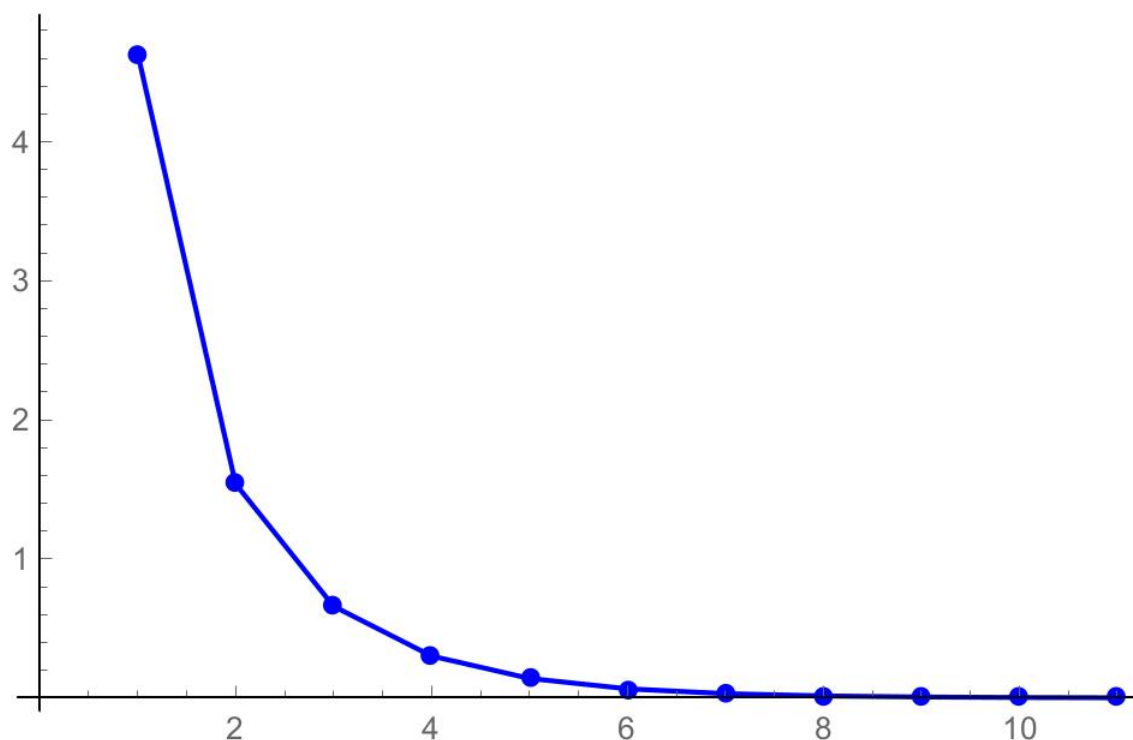


Figura 3.2: Gráfica del comportamiento de convergencia bajo las condiciones del ejemplo (3.5.2)

Iteración	$x_i$	$y_i$	$z_i$	Error
0	-1.	2.	3.	4.63681
1	-3.06154	-0.0615429	1.40869	1.53912
2	-3.42143	-0.421434	0.649992	0.65942
3	-3.48523	-0.485235	0.300787	0.301511
4	-3.497	-0.497005	0.140183	0.140247
5	-3.49931	-0.499314	0.0657979	0.0658051
6	-3.49981	-0.499815	0.0310751	0.0310762
7	-3.49994	-0.49994	0.0147528	0.0147531
8	-3.49998	-0.499978	0.00703466	0.00703473
10	-3.5	-0.499996	0.00161652	0.00161653
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	-3.5	-0.5	$1.173 \times 10^{-6}$	$1.173 \times 10^{-6}$

Tabla 3.2: Valores numéricos para el ejemplo 3.5.2.

# CAPÍTULO 4

---

## APROXIMACIÓN DE PUNTOS FIJOS EN APLICACIONES SUZUKI $(\alpha, \beta)$ -NO EXPANSIVAS EN ESPACIOS MÉTRICOS HIPERBÓLICOS PARCIALMENTE ORDENADOS.

En este capítulo, definimos una clase de aplicaciones monótonas  $(\alpha, \beta)$ -no expansivas y demostramos que existe una sucesión aproximada de puntos fijos, en espacios métricos hiperbólicos parcialmente ordenados. Además demostramos la  $\Delta$ -convergencia y la convergencia fuerte del método iterativo dado por (1.10.12).

Iniciamos con la definición dada por Aoyama y Kohsaka [32], donde introducen una nueva clase de aplicaciones no expansivas, denominadas  $(\alpha, \beta)$ -no expansivas además obtenemos convergencia para la aproximación de punto fijo para dichas aplicaciones

**Definición 4.0.1.** *Sea  $K$  un subconjunto no vacío de un espacio de Banach  $E$ . Y sea la aplicación  $T : K \rightarrow K$  se dice  $\alpha$ -no expansiva si, para todo  $u, v \in K$  y  $\alpha \in [0, 1)$ ,*

$$\|T(u) - T(v)\|^2 \leq \alpha\|T(u) - v\|^2 + \alpha\|u - T(v)\|^2 + (1 - 2\alpha)\|u - v\|^2. \quad (4.0.1)$$

**Teorema 4.0.1.** *Sea  $K$  un subconjunto convexo y cerrado, no vacío de un espacio de Banach uniformemente convexo  $E$  y sea  $T : K \rightarrow K$  una aplicación  $\alpha$ -no expansiva. Entonces  $F(T)$  es no vacío si y solo si existe  $u \in K$  tal que  $\{T^n(u)\}$  es acotado, donde  $F(T)$  denota el conjunto de puntos fijos de la aplicación  $T$ .*

Esta clase de aplicaciones se ha extendido recientemente a la clase de aplicaciones  $(\alpha, \beta)$ -no expansivas, la cual es definida por Amini-Harandi et al. [1].

**Definición 4.0.2.** *Sea  $K$  un subconjunto no vacío de un espacio de Banach  $E$ . Una Aplicación  $T : K \rightarrow K$  se dice  $\alpha, \beta$ -no expansiva si, para todo  $u, v \in K$  y  $\alpha, \beta \in [0, 1)$ ,*

$$\begin{aligned} \|T(u) - T(v)\|^2 \leq & \alpha\|T(u) - v\|^2 + \alpha\|u - T(v)\|^2 \\ & + \beta\|T(u) - u\|^2 + \beta\|v - T(v)\|^2 + (1 - 2\alpha - 2\beta)\|u - v\|^2. \end{aligned} \quad (4.0.2)$$

**Observación 4.0.1.** *Note que una aplicación  $(\alpha, \beta)$ -no expansiva se reduce a una aplicación  $\alpha$ -no expansiva cuando  $\beta = 0$  y a una aplicación no expansiva cuando  $\alpha = \beta = 0$ .*

Por otra parte, para generalizar aplicaciones no expansivas, Suzuki [75] introdujo la siguiente clase de aplicaciones obteniendo resultados de existencia y convergencia:

**Definición 4.0.3.** *Sea  $E$  un espacio Banach y  $K$  un subconjunto no vacío de  $E$ . Una aplicación  $T : K \rightarrow K$  se dice que satisface la condición (C) si, para todo  $u, v \in K$ ,*

$$\frac{1}{2}\|u - T(u)\| \leq \|u - v\| \quad \text{implica} \quad \|T(u) - T(v)\| \leq \|u - v\|.$$

A lo largo de este capítulo,  $W(u, v, \beta)$  se fija como

$$W(u, v, \beta) := (1 - \beta)u \oplus \beta v.$$

Decimos que un subconjunto  $K$  de  $\mathcal{M}$  es convexo si, para todo  $u, v \in K$ ,  $(1 - \beta)u \oplus \beta v \in K$  para todo  $\beta \in [0, 1]$ . Usamos  $(\mathcal{M}, d)$  para  $(\mathcal{M}, d, W)$  cuando no exista ambigüedad. Además, asumimos que el orden de los intervalos son subconjuntos convexos y cerrados de un espacio métrico hiperbólico  $(\mathcal{M}, d)$ . Lo denotamos de la siguiente manera:

$$[a, \rightarrow) := \{u \in \mathcal{M}; a \preceq u\} \quad \text{y} \quad (\leftarrow, b] := \{u \in \mathcal{M}; u \preceq b\}$$

para cualquier  $a, b \in \mathcal{M}$  (ver [7]).

## 4.1 Resultados de existencia en el proceso iterativo Picard

Primero, recordamos las siguientes definiciones y resultados preliminares:

**Definición 4.1.1.** [7]. *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio métrico parcialmente ordenado y  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  una aplicación. A la aplicación  $T$  se dice que es monotona si, para todo  $u, v \in \mathcal{M}$ ,*

$$u \preceq v \quad \text{implica} \quad T(u) \preceq T(v).$$

**Definición 4.1.2.** [7]. *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio métrico parcialmente ordenado y  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  una aplicación. A la aplicación  $T$  se dice que es monotona no expansiva si  $T$  es monotona y*

$$d(T(u), T(v)) \leq d(u, v) \tag{4.1.1}$$

para todo  $u, v \in \mathcal{M}$  tal que  $u$  y  $v$  son comparables.



Extendemos la Definición 4.0.2 dada en espacios métricos de Banach a los espacios métricos hiperbólicos de la siguiente manera:

**Definición 4.1.3.** Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio métrico parcialmente ordenado y  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  una aplicación. A la aplicación  $T$  se le dice *monotona  $(\alpha, \beta)$ -nonexpansiva* si  $T$  es monotona y existe  $\alpha, \beta \in [0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned} d(T(u), T(v))^2 &\leq \alpha d(T(u), v)^2 + \alpha d(u, T(v))^2 \\ &\quad + \beta d(T(u), u)^2 + \beta d(v, T(v))^2 + (1 - 2\alpha - 2\beta)d(u, v)^2 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

para todo  $u, v \in \mathcal{M}$  tal que  $u$  y  $v$  son comparables.

Además, podemos introducir una nueva clase de aplicaciones combinando las definiciones 4.1.2 y 4.0.2 de la siguiente manera:

**Definición 4.1.4.** Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio métrico parcialmente ordenado y  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  una aplicación. A la aplicación  $T$  se le dice *monotona Suzuki  $(\alpha, \beta)$ -no expansiva* si  $T$  es monotona y existe un  $\alpha, \beta \in [0, 1)$  tal que, si

$$\frac{1}{2}d(u, T(u)) \leq d(u, v),$$

entonces la condición (4.1.2) es verdadera para todo  $u, v \in \mathcal{M}$  tal que  $u$  y  $v$  son comparables.

Si  $\beta = 0$ , entonces la definición  $(\alpha, \beta)$ -no expansiva se reduce al concepto de  $\alpha$ -no expansiva definido en [57, 21]. Una aplicación  $(0, 0)$ -no expansiva es monótona y no expansiva. El caso Suzuki se presenta en [58]. Una aplicación  $T$   $\alpha$ -no expansiva con un punto fijo  $w \in \mathcal{K}$  es cuasi no expansiva, es decir,  $d(T(u), w) \leq d(u, w)$  para todo  $u \in \mathcal{K}$  y  $w \in F(T)$  de manera que  $u$  y  $w$  sean comparables. Puede completarse siguiendo la prueba de [75, Proposición 2].

Aunque las aplicaciones  $\alpha$ -no expansivas se definen para cualquier número real  $\alpha < 1$ , como Ariza-Ruiz et al. [18] señaló que este concepto es trivial para  $\alpha < 0$ . De ahora en adelante, asumimos que  $\alpha, \beta \in [0, 1)$ .

Ahora, presentamos nuestro primer resultado de existencia de puntos fijos el cual es una generalización de [7, Teorema 3.1] y [57, Teorema 3.5].

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio hiperbólico uniformemente convexo parcialmente ordenado y  $\mathcal{K}$  un subconjunto acotado cerrado y convexo de  $\mathcal{M}$  no reducido a un punto. Sea  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  una aplicación monótona Susuki  $(\alpha, \beta)$ -no expansiva. Asumimos que existe  $u \in \mathcal{K}$  tal que  $u$  y  $T(u)$  son comparables. Entonces  $T$  tiene un punto fijo.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $u \preceq T(u)$ . Ya que  $T$  es monótona, tenemos  $T(u) \preceq T^2(u)$ . Continuando de esta manera, obtenemos

$$T(u) \preceq T^2(u) \preceq T^3(u) \preceq T^4(u) \preceq \dots$$

Definimos  $u_n = T^n(u)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Puesto que  $\mathcal{M}$  es uniformemente convexo, esto es que satisface la propiedad (R) y por la construcción de  $\{u_n\}$ , tenemos

$$\mathcal{K}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u_n, \rightarrow) \cap \mathcal{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{u \in \mathcal{K}; u_n \preceq u\} \neq \emptyset.$$

Sea  $u \in \mathcal{K}_\infty$ . Entonces  $u_n \preceq u$ . Ya que  $T$  es monótona, tenemos  $u_n \preceq T(u_n) \preceq T(u)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Esto implica que  $T(\mathcal{K}_\infty) \subset \mathcal{K}_\infty$ . Sea  $\tau : \mathcal{K}_\infty \rightarrow [0, \infty)$  un tipo de función generada por  $\{u_n\}$ , esto es,

$$\tau(u) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u).$$

Desde el Lemma 1.8.9, se deduce que existe un elemento único  $w \in \mathcal{K}_\infty$  tal que

$$\tau(w) = \inf\{\tau(u) : u \in \mathcal{K}_\infty\}.$$

Puesto que  $w \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $u_n \preceq w$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $u_n = u_{n+1}$ , entonces  $d(u_n, u_{n+1}) \leq d(u_n, w)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . De nuevo, si  $u_n \prec u_{n+1}$ , entonces  $u_n \prec u_{n+1} \preceq w$ . Así, en ambos casos, tenemos  $d(u_n, u_{n+1}) \leq d(u_n, w)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y por lo tanto

$$\frac{1}{2}d(u_n, T(u_n)) \leq d(u_n, w).$$

En el caso generalizado, desde la Definición 4.1.4,

$$\begin{aligned} d(T(u_n), T(w))^2 &\leq \alpha d(T(u_n), w)^2 + \alpha d(u_n, T(w))^2 \\ &\quad + \beta d(T(u_n), u_n)^2 + \beta d(w, T(w))^2 + (1 - 2\alpha - 2\beta)d(u_n, w)^2. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Esta ecuación también es válida en el caso no generalizado por la definición de la aplicación  $(\alpha, \beta)$ -no expansiva.

Sea  $Tw \preceq w$ . Desde  $d(u_n, u_{n+1}) \leq d(u_n, w)$  y  $d(w, T(w)) \leq d(u_n, T(w))$ , obtenemos

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, T(w))^2 &= d(T(u_n), T(w))^2 \\ &\leq \alpha d(u_{n+1}, w)^2 + \alpha d(u_n, T(w))^2 + (1 - 2\alpha)d(u_n, w)^2. \end{aligned}$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$ , tenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_{n+1}, T(w))^2 &\leq \alpha \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_{n+1}, w)^2 + \alpha \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, T(w))^2 \\ &\quad + (1 - 2\alpha) \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w)^2 \end{aligned}$$

ó

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, T(w))^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w)^2.$$

Así tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, T(w)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w).$$

Sea  $w \preceq Tw$ . Desde  $d(u_n, u_{n+1}) \leq d(u_n, w)$  y  $d(w, T(w)) \leq d(u_n, T(w))$ , obtenemos

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, T(w))^2 = d(T(u_n), T(w))^2 &\leq \alpha d(u_{n+1}, w)^2 + (\alpha + \beta)d(u_n, T(w))^2 \\ &\quad + (1 - 2\alpha - \beta)d(u_n, w)^2. \end{aligned}$$

Tomando  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_{n+1}, T(w))^2 &\leq \alpha \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_{n+1}, w)^2 + (\alpha + \beta) \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, T(w))^2 \\ &\quad + (1 - 2\alpha - \beta) \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w)^2 \end{aligned}$$

ó

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, T(w))^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w)^2.$$

Así tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, T(w)) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w).$$

Desde  $\tau(w) = \inf\{\tau(u); u \in \mathcal{K}_\infty\}$ , la unicidad del punto mínimo, se sigue que  $T(w) = w$ , esto es,  $w$  es el punto fijo de  $T$ . Esto completa la demostración.  $\square$

El siguiente resultado es ligeramente diferente al teorema 4.1.1. En este resultado, en lugar de tomar el dominio de  $T$  un conjunto acotado, consideramos que la sucesión en un punto sea acotada y la demostración es similar al Teorema 3.7 de [57].

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio hiperbólico uninformemente convexo parcialmente ordenado y  $\mathcal{K}$  un subconjunto acotado cerrado y convexo de  $\mathcal{M}$  no reducido a un punto. Sea  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  una aplicación monótona Susuki  $(\alpha, \beta)$ -no expansiva. Asumimos que existe  $u \in \mathcal{K}$  tal que  $u$  y  $T(u)$  son comparables. Entonces  $F(T)$  es no vacío si y solo si  $\{T^n(u)\}$  es una sucesión acotada y existe un punto  $v \in \mathcal{K}$  tal que todo punto de la sucesión  $\{u_n\}$  es comparable con  $v$ .*

## 4.2 Resultado de existencia en el Proceso iterativo “CR”

Modificando el proceso iterativo (1.10.12) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u_1 \in \mathcal{K}, \\ v_n = \gamma_n T(u_n) \oplus (1 - \gamma_n)u_n, \\ w_n = \beta_n T(v_n) \oplus (1 - \beta_n)T(u_n), \\ u_{n+1} = \alpha_n T(w_n) \oplus (1 - \alpha_n)w_n \end{cases} \quad (4.2.1)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$  y  $\{\gamma_n\}$  son sucesiones de números reales en  $[0, 1]$ . Si se toma  $\alpha_n = 0$ , el proceso iterativo “CR” se reduce a la  $S$ -iteración (1.10.10).

**Lema 4.2.1.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio hiperbólico parcialmente ordenado y  $\mathcal{K}$  un subconjunto no vacío cerrado y convexo de  $\mathcal{M}$ . Sea  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  una aplicación monótona. Sea  $u_1 \in \mathcal{K}$  tal que  $u_1 \preceq T(u_1)$  (or  $T(u_1) \preceq u_1$ ). Entonces la sucesión  $\{u_n\}$  definida por (4.2.1), se tiene lo siguiente:*

- (1)  $u_n \preceq T(u_n) \preceq u_{n+1}$  (or  $u_{n+1} \preceq T(u_n) \preceq u_n$ ) para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- (2)  $u_n \preceq p$  (or  $p \preceq u_n$ ) provisto de  $\{u_n\}$   $\Delta$ -converge a un punto  $p \in \mathcal{K}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** (1) por inducción, demostraremos nuestro primer resultado. Asumiendo que  $u_1 \preceq T(u_1)$  y por la convexidad del intervalo ordenado,  $[u_1, T(u_1)]$  y (4.2.1), obtenemos

$$u_1 \preceq v_1 \preceq T(u_1). \quad (4.2.2)$$

Ahora como  $T$  es monótona, tenemos  $T(u_1) \preceq T(v_1)$  y por la convexidad del intervalo ordenado  $[T(u_1), T(v_1)]$  y (4.2.1), tenemos

$$T(u_1) \preceq w_1 \preceq T(v_1). \quad (4.2.3)$$

Combinando (4.2.2) y (4.2.3), obtenemos

$$u_1 \preceq v_1 \preceq T(u_1) \preceq w_1.$$

Puesto que  $T$  es monótona, tenemos  $w_1 \preceq T(v_1) \preceq T(w_1)$  y nuevamente por la convexidad del intervalo  $[w_1, T(w_1)]$  y (4.2.1), tenemos

$$w_1 \preceq u_2 \preceq T(w_1). \quad (4.2.4)$$

Combinando (4.2.2), (4.2.3) y (4.2.4), tenemos

$$u_1 \preceq v_1 \preceq T(u_1) \preceq w_1 \preceq u_2 \preceq T(w_1).$$

Por tanto, el resultado es verdadero para  $n = 1$ . De manera similar, para  $n = k - 1$ , obtenemos

$$u_{k-1} \preceq T(u_{k-1}) \preceq u_k$$

Y así, por inducción, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n \preceq v_n \preceq T(u_n) \preceq w_n \preceq u_{n+1} \preceq T(w_n), \quad w_n \preceq T(v_n) \preceq T(w_n). \quad (4.2.5)$$

(2) Suponga que  $p$  es un  $\Delta$ -límite de  $\{u_n\}$ . Aquí la sucesión  $\{u_n\}$  es monótona creciente y el intervalo ordenado  $[u_m, \rightarrow)$  es cerrado y convexo. Ahora afirmamos que  $p \in [u_m, \rightarrow)$  fijando  $m \in \mathbb{N}$ . Si  $p \notin [u_m, \rightarrow)$ , entonces el tipo de función generada por la sucesión  $\{u_r\}$  de  $\{u_n\}$  definido a partir del primer  $m - 1$  termino de la sucesión  $\{u_n\}$  no alcanzará un mínimo en  $p$ , lo cual es una contradicción con la suposición de que  $p$  es un  $\Delta$ -límite de la sucesión  $\{u_n\}$ . Esto completa la demostración.  $\square$

A continuación enunciamos uno de los resultados principales de este capítulo

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio hiperbólico uniformemente convexo parcialmente ordenado y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$  un subconjunto acotado cerrado y convexo de  $\mathcal{M}$ . Sea  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  una aplicación monótona Susuki  $(\alpha, \beta)$ -no expansiva. Asuma que existe  $u_1 \in \mathcal{K}$  tal que  $u_1$  y  $T(u_1)$  son comparables. Se  $\{u_n\}$  la sucesión generada por (4.2.1) es acotada y suponga que existe un punto  $v \in \mathcal{K}$  tal que todo punto de la sucesión  $\{u_n\}$  es comparable con  $v$  y*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(T(u_n), u_n) = 0.$$

*Entonces  $T$  tiene un punto fijo.*

**Demostración.** Suponga que  $\{u_n\}$  es una sucesión acotada y que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(T(u_n), u_n) = 0$ . Entonces existe una subsucesión  $\{u_{n_j}\}$  de  $\{u_n\}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), u_{n_j}) = 0. \quad (4.2.6)$$

Como  $u_{n_j}$  es acotada, existe  $u' \in \mathcal{K}$  y  $U \in \mathbb{R}$  tal que  $d(u_{n_j}, u') \leq U$ . Por lo tanto tenemos

$$d(T(u_{n_j}), u') \leq d(T(u_{n_j}), u_{n_j}) + d(u_{n_j}, u').$$

Ya que  $\{T(u_{n_j})\}$  es acotada. Por el Lema 4.2.1, tenemos  $u_1 \preceq u_{n_j} \preceq u_{n_{j+1}}$ . Ahora definimos

$$\mathcal{K}_j = \{u \in \mathcal{K} : u_{n_j} \preceq u\}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Claramente, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{K}_j$  es cerrado y convexo. Desde  $v \in \mathcal{K}_j$ , se sigue que  $\mathcal{K}_j$  es no vacío. Sea

$$\mathcal{K}_\infty = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{u \in \mathcal{K} : u_{n_j} \preceq u\} \neq \emptyset$$

un subconjunto cerrado y convexo de  $\mathcal{K}$ . Sea  $u \in \mathcal{K}_\infty$ . Entonces  $u_{n_j} \preceq u$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Desde  $T$  es monótona, se sigue que, por cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n_j} \preceq T(u_{n_j}) \preceq T(u).$$

Esto implica que  $T(\mathcal{K}_\infty) \subset \mathcal{K}_\infty$ . Sea  $\tau : \mathcal{K}_\infty \rightarrow [0, \infty)$  un tipo de función generada por  $\{T(u_{n_j})\}$ , esto es,

$$\tau(u) = \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), u).$$

Desde Lema 1.8.9, se sigue que entonces existe un único elemento  $w \in \mathcal{K}_\infty$  tal que

$$\tau(w) = \inf\{\tau(u); u \in \mathcal{K}_\infty\}.$$

Por la definición del tipo de función, tenemos,

$$\tau(T(w)) = \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), T(w)).$$

Por la desigualdad triangular y (4.2.6), obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), u) &\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), u_{n_j}) + \limsup_{j \rightarrow \infty} d(u_{n_j}, u) \\ &= \limsup_{j \rightarrow \infty} d(u_{n_j}, u). \end{aligned}$$

De manera similar tenemos

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} d(u_{n_j}, u) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), u).$$

Por lo tanto obtenemos

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} d(u_{n_j}, u) = \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), u). \quad (4.2.7)$$

Desde  $w \in \mathcal{K}_\infty$ , tenemos  $u_{n_j} \preceq w$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Siguiendo desde la monotonicidad de  $T$  y el Lema 4.2.1 que  $u_{n_j} \preceq T(u_{n_j}) \preceq w$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Entonces tenemos,

$$d(u_{n_j}, T(u_{n_j})) \leq d(u_{n_j}, w)$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Por (4.0.3), para cada  $j \in \mathbb{N}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} d(T(u_{n_j}), T(w))^2 &\leq \alpha d(T(u_{n_j}), w)^2 + \alpha d(u_{n_j}, T(w))^2 \\ &\quad + \beta d(T(u_{n_j}), u_{n_j})^2 + \beta d(w, T(w))^2 \\ &\quad + (1 - 2\alpha - 2\beta) d(u_{n_j}, w)^2. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Dejando  $a_j := d(T(u_{n_j}), T(w))$ ,  $b_j := d(u_{n_j}, T(u_{n_j}))$  y  $c_j := d(u_{n_j}, w)$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Entonces, para todo  $j \in \mathbb{N}$ , tenemos

$$d(u_{n_j}, T(w))^2 = (a_j + b_j)^2 = a_j^2 + b_j^2 + 2a_j b_j$$

y

$$d(w, T(w))^2 = (a_j + b_j + c_j)^2 = a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 + 2a_j b_j + 2a_j c_j + 2b_j c_j.$$

Por desigualdad triangular, (4.2.8) se reduce a

$$\begin{aligned} (1 - \alpha - \beta) a_j^2 &\leq \alpha d(T(u_{n_j}), w)^2 + (\alpha + 2\beta) b_j^2 + (1 - 2\alpha - \beta) c_j^2 \\ &\quad + 2(\alpha + \beta) a_j b_j + 2\beta a_j c_j + 2\beta b_j c_j. \end{aligned}$$

Utilizando (4.2.6), obtenemos

$$\begin{aligned} (1 - \alpha - \beta) \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j^2 &\leq \alpha \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), w)^2 + (1 - 2\alpha - \beta) \limsup_{j \rightarrow \infty} c_j^2 \\ &\quad + 2\beta \limsup_{j \rightarrow \infty} a_j c_j. \end{aligned}$$

Por (4.2.7), tenemos

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), T(w))^2 \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), w)^2.$$

Esto implica que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), T(w)) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} d(T(u_{n_j}), w).$$

Por lo tanto,  $\tau(T(w)) \leq \tau(w)$  y finalmente por la unicidad del punto mínimo  $T(w) = w$ . Esto completa la demostración.  $\square$

### 4.3 Resultados de convergencia

En esta sección, discutimos algunos resultados de convergencia para el proceso de iteración “CR” en espacios métricos hiperbólicos parcialmente ordenados.

**Lema 4.3.1.** [5]. *Sea  $(\mathcal{M}, d)$  un espacio hiperbólico uniformemente convexo con modulo monótono de convexidad uniforme  $\delta$ . Sean  $w \in \mathcal{M}$  y  $\{\alpha_n\}$  sucesiones, tal que  $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Si  $\{u_n\}$  y  $\{v_n\}$  son sucesiones en  $\mathcal{M}$  de modo que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w) \leq r, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, w) \leq r$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\alpha_n v_n \oplus (1 - \alpha_n) u_n, w) = r$$

para algún  $r \geq 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, u_n) = 0$ .

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio hiperbólico uniformemente convexo parcialmente ordenado y  $\mathcal{K}$  un subconjunto cerrado y convexo de  $\mathcal{M}$ . Sea  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  una aplicación monótona Suzuki  $(\alpha, \beta)$ -no expansiva. Asuma que existe  $u_1 \in \mathcal{K}$  tal que  $u_1$  y  $T(u_1)$  son comparables. Suponga que  $F(T)$  es no vacío y  $u_1$  y  $w$  son comparables para todo  $w \in F(T)$ . Sea  $\{u_n\}$  la sucesión definida por (4.2.1). Entonces lo siguiente es verdadero:*

- (1) *La sucesión  $\{u_n\}$  es acotada.*
- (2)  $\max\{d(u_{n+1}, w), d(v_n, w), d(w_n, w)\} \leq d(u_n, w)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n, F(T))$  existe.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T(u_n), u_n) = 0$ .

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $u_1 \preceq w$ . Entonces, por la monotonía de  $T$ ,  $T(u_1) \preceq T(w) = w$ . Por (4.2.5), tenemos  $v_1 \preceq T(u_1) \preceq T(w) = w$ . Por la monotonía de  $T$  y (4.2.5),  $w_1 \preceq T(v_1) \preceq T(w) = w$ . Desde  $T$  es monótona, tenemos  $T(w_1) \preceq T(w) = w$ . Entonces, de nuevo desde (4.2.5), tenemos

$$u_2 \preceq T(w_1) \preceq w.$$



Continuando de esta manera, obtenemos

$$u_n \preceq w$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por (4.2.5), tenemos  $d(T(u_n), u_n) \leq d(u_n, w)$  y, por la Definición 4.1.4, tenemos

$$\begin{aligned} d(T(u_n), w)^2 &\leq \alpha d(T(u_n), w)^2 + \alpha d(u_n, w)^2 + \beta d(T(u_n), u_n)^2 \\ &\quad + (1 - 2\alpha - 2\beta) d(u_n, w)^2 \\ &\leq \alpha d(T(u_n), w)^2 + (1 - \alpha - \beta) d(u_n, w)^2. \end{aligned}$$

Así que,  $d(T(u_n), w) \leq d(u_n, w)$ . De manera similar, tenemos

$$d(T(v_n), w) \leq d(v_n, w), \quad d(T(w_n), w) \leq d(w_n, w).$$

Por (4.2.1), entonces

$$\begin{aligned} d(v_n, w) &= d(\gamma_n T(u_n) \oplus (1 - \gamma_n) u_n, w) \\ &\leq \gamma_n d(T(u_n), w) + (1 - \gamma_n) d(u_n, w) \\ &\leq \gamma_n d(u_n, w) + (1 - \gamma_n) d(u_n, w) \\ &= d(u_n, w). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por (4.2.1), tenemos

$$\begin{aligned} d(w_n, w) &= d(\beta_n T(v_n) \oplus (1 - \beta_n) T(u_n), w) \\ &\leq \beta_n d(T(v_n), w) + (1 - \beta_n) d(T(u_n), w) \\ &\leq \beta_n d(v_n, w) + (1 - \beta_n) d(u_n, w) \\ &\leq \beta_n d(u_n, w) + (1 - \beta_n) d(u_n, w) \\ &= d(u_n, w). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Finalmente, por (4.2.1), obtenemos

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, w) &= d(\alpha_n T(w_n) \oplus (1 - \alpha_n) w_n, w) \\ &\leq \alpha_n d(T(w_n), w) + (1 - \alpha_n) d(w_n, w) \\ &\leq \beta_n d(w_n, w) + (1 - \beta_n) d(u_n, w) \\ &\leq \beta_n d(u_n, w) + (1 - \beta_n) d(u_n, w) \\ &= d(u_n, w). \end{aligned}$$

Ya que la sucesión  $\{d(u_n, w)\}$  es acotada y monótona decreciente, así que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w)$  existe. Por cada  $w \in F(T)$ , tenemos  $d(u_{n+1}, w) \leq d(u_n, w)$  por cada  $n \in \mathbb{N}$ , tomando el infimum por encima de todo  $w \in F(T)$ , obtenemos  $D(u_{n+1}, F(T)) \leq D(u_n, F(T))$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces la sucesión  $\{D(u_n, F(T))\}$  es cerrada y monótona decreciente. Por tanto, se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n, F(T))$  existe. Suponga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w) = r. \quad (4.3.2)$$

desde (4.3.2), tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(u_n), w), \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(v_n), w), \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(w_n), w) \leq r. \quad (4.3.3)$$

siguiendo (4.3.1) y (4.3.2), conseguimos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(v_n, w), \limsup_{n \rightarrow \infty} d(w_n, w) \leq r. \quad (4.3.4)$$

Por (4.2.1), entonces

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_{n+1}, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} d((1 - \alpha_n)w_n \oplus \alpha_n T(w_n), w). \quad (4.3.5)$$

En vista de (4.3.3), (4.3.5) y Lema 4.3.1, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(w_n, T(w_n)) = 0. \quad (4.3.6)$$

Por (4.2.1), obtenemos nuevamente

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, T(w_n)) &= d((1 - \alpha_n)w_n \oplus \alpha_n T(w_n), T(w_n)) \\ &\leq (1 - \alpha_n)d(w_n, T(w_n)). \end{aligned}$$

Dejando  $n \rightarrow \infty$  y utilizando (4.3.6), obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_{n+1}, T(w_n)) = 0. \quad (4.3.7)$$

Ahora, observe que

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, w) &\leq d(u_{n+1}, T(w_n)) + d(T(w_n), w) \\ &\leq d(u_{n+1}, T(w_n)) + d(w_n, w), \end{aligned}$$

lo cual produce que

$$r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(w_n, w). \quad (4.3.8)$$

Desde (4.3.4) y (4.3.8), obtenemos

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} d(w_n, w) = \liminf_{n \rightarrow \infty} d((1 - \beta_n)T(u_n) \oplus \beta_n T(v_n), w). \quad (4.3.9)$$

Finalmente, desde (4.3.2) y Lemma 3, concluimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T(u_n), T(v_n)) = 0$ .

De nuevo, por (4.2.1), tenemos

$$\begin{aligned} d(w_n, T(v_n)) &= d((1 - \beta_n)T(u_n) \oplus \beta_n T(v_n), T(v_n)) \\ &\leq (1 - \beta_n)d(T(u_n), T(v_n)). \end{aligned}$$

Dejando  $n \rightarrow \infty$  y utilizando (4.3.6), tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(w_n, T(v_n)) = 0. \quad (4.3.10)$$

Ahora observe que

$$\begin{aligned} d(w_n, w) &\leq d(w_n, T(v_n)) + d(T(v_n), w) \\ &\leq d(w_n, T(v_n)) + d(v_n, w), \end{aligned}$$

lo cual produce

$$r \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(v_n, w). \quad (4.3.11)$$

Desde (4.3.4) y (4.3.8), tenemos

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, w) = \liminf_{n \rightarrow \infty} d((1 - \gamma_n)u_n \oplus \gamma_n T(u_n), w). \quad (4.3.12)$$

Finalmente, desde (4.3.4), (4.3.12) y Lema (4.3.1), concluimos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(T(u_n), u_n) = 0$ .

Esto completa la demostración.  $\square$

Ahora presentamos un resultado de  $\Delta$ -convergencia.

**Teorema 4.3.3.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio hiperbólico uninformemente convexo parcialmente ordenado. Sea  $\mathcal{K}$ ,  $T$  y  $\{u_n\}$  iguales que en el Teorema 4.3.2. Si  $F(T)$  no está vacío y está totalmente ordenado, entonces  $\{u_n\}$   $\Delta$ -converge a un punto fijo de  $T$ .*

**Demostración.** Por el teorema 4.3.2,  $\{u_n\}$  es una sucesión acotada. Por lo tanto existe una subsucesión  $\{u_{n_j}\}$  de  $\{u_n\}$  tal que  $\{u_{n_j}\}$   $\Delta$ -converge a algún  $p \in \mathcal{K}$ . Utilizando el Lema 4.2.1, tenemos

$$u_1 \preceq u_{n_j} \preceq p \quad (\text{or } p \preceq u_{n_j} \preceq u_1)$$

para cada  $j \in \mathbb{N}$ .

Ahora, demostramos que cada subsucesión  $\Delta$ -convergente de  $\{u_n\}$  tiene un único  $\Delta$ -límite en  $F(T)$ . Argumentando por contradicción, supongamos que  $\{u_n\}$  tiene dos subsucesiones  $\{u_{n_j}\}$  y  $\{u_{n_k}\}$   $\Delta$ -convergentes a  $p$  y  $q$ , respectivamente. Por el Teorema 4.3.2,  $\{u_{n_j}\}$  es acotada y  $d(T(u_{n_j}), u_{n_j}) = 0$ . Afirmamos que  $p \in F(T)$ . Siguiendo la demostración del teorema 4.2.2, tenemos  $T(p) = p$ . Por un argumento similar,  $T(q) = q$ . Desde  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w)$  existe para todo  $w \in F(T)$ , por la definición de  $\Delta$ -convergencia y Lema 1.8.9, tenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, p) &= \limsup_{j \rightarrow \infty} d(u_{n_j}, p) < \limsup_{j \rightarrow \infty} d(u_{n_j}, q) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, q) = \limsup_{k \rightarrow \infty} d(u_{n_k}, q) \\ &< \limsup_{k \rightarrow \infty} d(u_{n_k}, p) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(u_n, p), \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, a menos que  $p = q$ . Esto completa la demostración.  $\square$

A continuación enunciamos y demostramos un teorema de convergencia fuerte.

**Teorema 4.3.4.** *Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio hiperbólico uniformemente convexo parcialmente ordenado y sea  $\mathcal{K}$ ,  $T$  y  $\{u_n\}$  iguales que en el Teorema 4.3.2. Suponga que  $F(T)$  no está vacío y está totalmente ordenado. Entonces la sucesión  $\{u_n\}$  converge fuertemente a un punto fijo de  $T$  si y sólo si*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D(u_n, F(T)) = 0.$$

**Demostración.** Suponga que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} D(u_n, F(T)) = 0$ . Desde el teorema 4.3.2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n, F(T))$  existe y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n, F(T)) = 0. \quad (4.3.13)$$

Primero, demostramos que el conjunto  $F(T)$  es cerrado. Sea  $\{z_n\}$  una sucesión en  $F(T)$  converge fuertemente a un punto  $z \in \mathcal{K}$ . Por la Definición 4.1.4, tenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(z_n), T(z))^2 &\leq \alpha \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(z_n), z)^2 + \alpha \limsup_{n \rightarrow \infty} d(z_n, T(z))^2 \\ &\quad + \beta \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(z_n), z_n)^2 + \beta \limsup_{n \rightarrow \infty} d(z, T(z))^2 \\ &\quad + (1 - 2\alpha - 2\beta) \limsup_{n \rightarrow \infty} d(z_n, z)^2. \end{aligned}$$

Por lo que  $d(z, T(z)) \leq d(z, z_n) + d(z_n, T(z))$ , resulta que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} d(z_n, T(z)) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(z_n), T(z)) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2\beta}{1 - \alpha - \beta} d(z_n, T(z))\right) d(z_n, z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $\{z_n\}$  converge fuertemente a  $T(z)$ . Esto implica que  $T(z) = z$ . Por lo tanto,  $F(T)$  es cerrado. En vista de (4.3.13), sea  $\{u_{n_j}\}$  una subsucesión de la sucesión  $\{u_n\}$  tal que

$$d(u_{n_j}, z_j) \leq \frac{1}{2^j}$$

para cada  $j \geq 1$ , donde  $\{w_j\}$  es una sucesión en  $F(T)$ . Por el Teorema 4.3.2, tenemos

$$d(u_{n_{j+1}}, z_j) \leq d(u_{n_j}, z_j) \leq \frac{1}{2^j}. \quad (4.3.14)$$

Ahora, por desigualdad triangular y (4.3.14), obtenemos

$$\begin{aligned} d(z_{j+1}, z_j) &\leq d(z_{j+1}, u_{n_{j+1}}) + d(u_{n_{j+1}}, z_j) \\ &\leq \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^j} \\ &< \frac{1}{2^{j-1}}. \end{aligned}$$

Un argumento estándar demuestra que  $\{z_j\}$  es una sucesión de Cauchy. Desde  $F(T)$  es cerrado, se sigue que  $\{z_j\}$  converge algún punto  $z \in F(T)$ . Ahora, tenemos

$$d(u_{n_j}, z) \leq d(u_{n_j}, z_j) + d(z_j, z).$$

Dejando  $j \rightarrow \infty$  implica que  $\{u_{n_j}\}$  converge fuertemente a  $z$ . Por el Lema 4.3.2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, z)$  existe. Por lo tanto  $\{u_n\}$  converge fuertemente a  $z$ . La parte inversa es obvia. Esto completa la demostración.  $\square$

**Definición 4.3.1.** [26]. Sea  $\mathcal{K}$  un subconjunto de un espacio métrico  $(\mathcal{M}, d)$ . Una aplicación  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  se dice que satisface la condición (I) si existe un función no decreciente  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  que satisface  $f(0) = 0$  y  $f(r) > 0$  para todo  $r \in (0, \infty)$  tal que  $d(u, T(u)) \geq f(D(u, F(T)))$  para todo  $u \in \mathcal{K}$ , donde  $D(u, F(T))$  denota la distancia desde  $u$  a  $F(T)$ .

**Teorema 4.3.5.** Sea  $(\mathcal{M}, d, \preceq)$  un espacio hiperbólico uniformemente convexo parcialmente ordenado y sea  $\mathcal{K}$ ,  $T$  y  $\{u_n\}$  iguales que en el Teorema 4.3.2. Sea  $T$  la cual satisface la condición (I) y  $F(T)$  no está vacío. Entonces  $\{u_n\}$  converge fuertemente a un punto fijo de  $T$ .

**Demostración.** Desde el Teorema 4.3.2, se sigue que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(T(u_n), u_n) = 0. \quad (4.3.15)$$

Ya que  $T$  satisfice la condición (I), tenemos

$$d(T(u_n), u_n) \geq f(D(u_n, F(T))).$$

Desde (4.3.15), tenemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(D(u_n, F(T))) = 0.$$

Por lo que  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no decreciente con  $f(0) = 0$  y  $f(r) > 0$  para todo  $r \in (0, \infty)$ , tenemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D(u_n, F(T)) = 0.$$

Por lo tanto, todas las hipótesis del teorema 4.3.4 se satisfacen y entonces  $\{u_n\}$  converge fuertemente a un punto fijo de  $T$ . Esto completa la demostración.  $\square$

## 4.4 Algunos Problemas Abiertos

Durante el desarrollo de esta investigación fueron apareciendo una serie de inquietudes que poco a poco se fueron convirtiendo en interesantes problemas, los cuales no se lograron solucionar hasta el momento, es por esto que esta sección los proponemos a la espera que un futuro no muy lejano poder resolverlos, o tal vez lograr despertar la curiosidad en algún entusiasta de las matemáticas y poder llevarlos a feliz término.

### 4.4.1 Problema 1

En 1976 G. Jungk [24], establece un esquema iterativo para aproximar puntos fijos comunes para un par de aplicaciones  $S$  y  $T$  las cuales satisfacen la siguiente condición de contractividad

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(Sx, Sy), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Varios han sido los autores que bajo esta línea propuesta por G. Jungk han demostrado teoremas de convergencia con distintos tipos de iteraciones, todos ellos en condiciones de espacios métricos de Banach. Como ya lo hemos mencionado los espacios de Hilbert son los únicos espacios de Banach que son CAT(0). Es casi natural el pensar algún esquema

iterativo tipo Jungck que converge a los puntos fijos comunes de un par de operadores  $T$  y  $S$  en espacios métricos  $CAT(0)$ , más aún surge de manera inmediata la siguiente pregunta ¿Es posible establecer  $\Delta$ -convergencia en operadores tipo Jungck en el marco de espacios métricos  $CAT(0)$ ?

#### 4.4.2 Problema 2

Sea  $f$  y  $g$  dos operadores en un espacio métrico  $(X, d)$ . Se dice que satisfacen una condición contractiva generalizada tipo Berinde, si existe una constante  $\lambda \in [0, \infty]$  y algún  $L \geq 0$  tal que

$$\psi(d(fx, gy)) \leq \psi(\lambda u(x, y)) - \varphi(\lambda u(x, y)) - LN(x, y)$$

donde  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es una función de distancia alterada y  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es una función semicontinua inferior con si y solo si  $t = 0$ . Además

$$u(x, y) = \left\{ d(x, y)d(x, fx), d(y, gy), \frac{1}{2}(d(fx, y) + d(x, gy)) \right\}$$

y

$$N(x, y) = \min \{d(x, y), d(x, fx), d(y, gy), d(y, fx), d(x, gy)\}.$$

¿Se puede establecer un esquema iterativo de tres pasos con perturbaciones que converge a los puntos fijos comunes de  $f$  y  $g$  bajo la contractividad propuesta? ¿Se podrá llevar este tipo de contracciones a espacios métricos  $CAT(0)$ ?

Los resultados originales que presentamos en esta tesis han dado lugar a las siguientes publicaciones:

- K. Calderón, J. Martínez-Moreno and E. M. Rojas,. *Hybrid algorithm with perturbations for total asymptotically non-expansive mappings in CAT(0) space*. International Journal of Computer Mathematics, 97(1-2), 405-419. (2020).
- K. Calderón, M. A. Khamsi and J. Martínez-Moreno,. *Perturbed approximations of fixed points of nonexpansive mappings in  $CAT_p(0)$  spaces*. Carpathian J. Math., 37(1), 65-79. (2021)
- J. Martínez-Moreno, K. Calderón, P. Kumam, and E.M. Rojas,. *Approximating Fixed Points of Suzuki  $(\alpha, \beta)$ -Nonexpansive Mappings in Ordered Hyperbolic Metric Spaces*. In Advances in Metric Fixed Point Theory and Applications (pp. 365-383). Springer, Singapore. (2021).



---

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Amini-Harandia, M. Fakhar and H. R. Hajisharifi., *Approximate fixed points of  $\alpha$ -nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 467, 1168–1173. (2018).
- [2] A.D. Alexandrov., *A theorem on triangles in a metric space and some of its applications*, Trudy Mat. Inst. Steklov, 38 (1951), 5-23.
- [3] A. Naor., L. Silberman., *Poincaré inequalities, embeddings, and wild groups*. Compositio Mathematica, 147(5), 1546–1572. (2011).
- [4] A. Pansuwan., W. Sintunavarat., *A new iterative scheme for numerical reckoning fixed points of total asymptotically nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. 1, 83. (2016).
- [5] A.R. Khan., H. Fukhar-uddin and M. A. Khan., *An implicit algorithm for two finite families of nonexpansive maps in hyperbolic spaces*, Fixed Point Theory Appl. 54. (2012).
- [6] A.Tarski., *A lattice theoretical fixpoint theorem and its applications*. Pac. J. Math. 5 , 285–309 (1955).
- [7] B.A. Bin Dehaish., M.A. Khamisi., *Browder and Göhde fixed point theorem for monotone nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl.20. (2016).
- [8] B.E. Rhoades., *Comments on two fixed point iteration methods*. J. Math. Anal. Appl., 56, No. 2, 741–750 (1976).
- [9] B.E. Rhoades., *A comparison of various definitions of contractive mappings*. Trans. Amer. Math. Soc., 226, 257–290, (1977).
- [10] B.E. Rhoades., *A general principle for Mann iterates*. Indian J. Pure Appl. Math., 26, No. 8, 751–762 (1995).

- [11] B.E. Rhoades., S. Soltuz., *On the equivalence of Mann and Ishikawa iteration methods*. Int. J. Math. Math. Sci., 7, 451–459 (2003).
- [12] B. Martinet., *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*. Rev. Fr. Inform. Rech. Oper.4, 154–158 (1970).
- [13] B.S. Thakur, D. Thakur., M. Postolache., *Modified Picard-Mann hybrid iteration process for total asymptotically nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. 1, 140. (2015)
- [14] B. Xu., M. Noor., *Fixed-point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. 267.2, 444-453. (2002)
- [15] C. Groetsch., *A note on segmenting Mann iterates and Applications*, 40(2) :369-372. (1972).
- [16] C. Klin-eam, S. Suantai., *Fixed point theorems for  $\alpha$ -nonexpansive mappings*, Appl. Math. Lett. 23, 728–731. (2010).
- [17] D.A. Ruiz., D, Leustean and L, Lopez, G., *Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces*. Trans. Am. Math. Soc. 366, 4299-4322. (2014).
- [18] D.A. Ruiz., C. H. Linares., E. L. Fuster and E. M. Galvez, *On alpha-nonexpansive mappings in banach spaces*, Carpathian J. Math. 32, 13–28. (2016).
- [19] D. Burago, Y. Burago, and S. A. Ivanov., *A course in metric geometry* (Vol. 33). American Mathematical Soc. (2001).
- [20] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nach, 251- 258, 30 (1965).
- [21] E. Naraghirad., N. C. Wong and J. C. Yao., *Approximating fixed points of  $\alpha$ -nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces and CAT(0) spaces*, Fixed Point Theory Appl.57. (2013)
- [22] F.E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 43, 1004-1006, (1965).
- [23] F.E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54, 1041-1044, (1965).

- [24] G. Jungck., *Commuting mappings and fixed points*, Amer. Math. Mon. 83(4), 261–263. (1976)
- [25] G.S. Saluja., M. Postolache., *Three-step iterations for total asymptotically nonexpansive mappings in CAT(0) spaces*, Filomat, 31, 1317–1330. (2017).
- [26] H.F. Senter., W. G. Dotson., *Approximating fixed points of nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 44, 375–380. (1974).
- [27] H. Schaefer., *Über die methode sukzessiver approximationen*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 59, :131–140. (1957).
- [28] I. Uddin., J. J. Nieto., J. Ali., *One-step iteration scheme for multivalued nonexpansive mappings in CAT(0) spaces*, Mediterr. J. Math. 13, 1211–1225. (2016).
- [29] J. A. Clarkson., *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40, 396–414. (1936).
- [30] J. Jost., *Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of nonpositive curvature*. Comment. Math. Helv. 70, 659–673. (1995).
- [31] J.J. Moreau., *Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien*, C. R. Acad. Sci. Paris, 255., 2897–2899. (1962).
- [32] K. Aoyama., F. Kohsaka., *Fixed point theorem for  $\alpha$ -nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. 74, 4387–4391. (2011).
- [33] K. Goebel., W. A. Kirk., *Iteration processes for nonexpansive mappings*, Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis (Toronto, Ont., 1982), Contemp. Math., vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 115–123. (1982)
- [34] K. Goebel., S. Reich., *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Dekker, New York, (1984).
- [35] K. Goebel., W.A. Kirk., *Topics in Metric Fixed Point Theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1990).
- [36] K. Goebel., M. Japón Pineda., *A new type of nonexpansiveness*, Proc. of the 8th International Conference on Fixed Point Theory and Appl., Chiang Mai, (2007).

- [37] K.K. Tan., H. K. Xu., *Approximating fixed points of non-expansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl. 178, 301–301. (1993).
- [38] L. Ambrosio., N. Gigli and G. Savare., *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, 2nd edn. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser, Basel (2008).
- [39] L.E.J. Brouwer., *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. 71, 97–115 (1912).
- [40] L.S. Liu., *Fixed points of local strictly pseudo-contractive mappings using Mann and Ishikawa iteration with errors*. Indian J. Pure Appl. Math., 26, No. 7, 649–659 (1995).
- [41] L.S. Liu., *Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl., 194, 114–125 (1995).
- [42] L. Qihou., *On Naimpally and Singh's open questions*. J. Math. Anal. Appl., 124, 157–164 (1987).
- [43] L. Qihou., *Convergence theorems of the sequence of iterates for asymptotically demi-contractive and hemicontractive mappings*. Nonlinear Anal. 26, 1835–1842. (1996).
- [44] M. Bacák., *The proximal point algorithm in metric spaces*. Isr. J. Math. 194, 689–701 (2013).
- [45] M. Bacák., *Computing medians and means in Hadamard spaces*. SIAM J. Optim. 24, 1542–1566 (2014).
- [46] M.A. Khamsi., *On metric spaces with uniform normal structure*. Proc. Am. Math. Soc. 106, 723–726 (1989)
- [47] M.A. Khamsi., S. A. Shukri., *Generalized CAT(0) spaces*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 24. 3, 417–426. (2017).
- [48] M.A. Krasnoselskii., *Two remarks on the method of successive approximations*. Akademi- ya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. Uspekhi Matematicheskikh Nauk , 10, :123–127 (1955).
- [49] M. Bridson., A. Haefliger., *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1999).

- [50] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [51] M.O. Osilike., *Stability of the Mann and Ishikawa iteration procedures for  $\varphi$ -strong pseudocontractions and nonlinear equations of the  $\varphi$ -strongly accretive type*. J. Math. Anal. Appl., 227, No. 2, 319–334 (1998).
- [52] N. Pakkaranang., P. Kumam., P. Cholamjiak., R. Suparatulatorn., P. Chaipunya., *Proximal point algorithms involving fixed point iteration for nonexpansive mappings in  $CAT(\kappa)$  spaces* Carpathian Journal of Mathematics, 34 (2), 229–237. (2018).
- [53] N. Pakkaranang., P. Kumam., C.F. Wen., J.C. Yao., Y.J. Cho., *On modified proximal point algorithms for solving minimization problems and fixed point problems in  $CAT(\kappa)$  spaces*. To appear in Mathematical Methods in the Applied Sciences. (2019).
- [54] P. Cholamjiak., A.A.N. Abdou., Y.J.Cho., *Proximal point algorithms involving fixed points of nonexpansive mappings in  $CAT(0)$  spaces* Fixed Point Theory and Applications, 227, 1–13. (2015).
- [55] R.P. Agarwal., D. O Regan., D.R. Sahu., *Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings*. J. Nonlinear Convex Anal. 8, 61. (2007).
- [56] R. Chugh., V. Kumar and S. Kumar., *Strong convergence of a new three step Iterative scheme in Banach spaces*, American Journal of Computational Mathematics. 2, 345–357. (2012).
- [57] R. Shukla., R. Pant., P. Kumam., *On the  $\alpha$ -nonexpansive mapping in partially ordered hyperbolic metric spaces*, J. Math. Anal. 8 Issue 1, 1–15. (2017).
- [58] R. Shukla., R. Pant., M. De la Sen., *Generalized  $\alpha$ -nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2017).
- [59] R.T. Rockafellar., *Monotone operators and the proximal point algorithm*. SIAM J. Control Optim. 14, 877–898 (1976).
- [60] S. Banach., *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications*. Fund. Math. 3, 133–181 (1922).

- [61] S. Dhompongsa., W.A. Kirk., B. Panyanak., *Nonexpansive set-valued mappings in metric and Banach spaces*. J. Nonlinear Convex Anal. 8, 35–45.(2007).
- [62] S. Dhompongsa., B. Panyanak., *On  $\Delta$ -convergence theorems in CAT(0) spaces*. Computers & Mathematics with Applications, 56(10), 2572–2579.(2008).
- [63] S.A. Nainpally, K.L. Singh, ., *Sequence of iterates in locally convex spaces*. In: Nonlinear phenomena in mathematical sciences, Proc. Int. Conf., Arlington/Tex. 1980, 725–736 (1982).
- [64] S.H. Khan., *A Picard-Mann hybrid iterative process*. Fixed Point Theory Appl. 2013, Article ID 69 (2013).
- [65] S. Ishikawa., *Fixed points by a new iteration method*. Proc. Amer. Math. Soc., 44,1 , 147–150 (1974).
- [66] S. Ishikawa., *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a banach space*. Proceedings of the American Mathematical Society , 59(1) :65-71. (1976).
- [67] S. Itoh., *Some fixed-point theorems in metric spaces*, Fund. Math. 102, 109–117. (1979)
- [68] S.I. Ohta., *Convexities of metric spaces*. Geom. Dedicata 125, 225–250 (2007).
- [69] S. Reich., I. Shafrir., *Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces*. Nonlinear Anal. 15, no. 6, 537–558. (1990).
- [70] S.S. Chang, L. Wang, H.J. Lee, C.K. Chan, and L. Yang., *Demiclosed principle and  $\Delta$ -convergence theorems for total asymptotically nonexpansive mappings in CAT(0) spaces*, Appl. Math. Comput. 219 pp. 2611–2617, (2012).
- [71] T.C. Lim., *Remarks on some fixed point theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. 60 179–182. (1976).
- [72] T.C. Lim., *Fixed point theorem for uniformly Lipschitzian mappings in  $L_p$  spaces*, Nonlinear Anal. 7 , 555–563. (1983).
- [73] T.L. Hicks., J.R. Kubicek., *On the Mann iteration process in Hilbert space*. J. Math. Anal. Appl., 59, 498–504 (1977).

- [74] T. Kuczumow., S. Reich., A. Stachura., *Minimal displacement of points under holomorphic mappings and fixed point properties for unions of convex sets*, Transactions of the AMS, vol. 343, 575–586. (1994).
- [75] T. Suzuki., *Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized non-expansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 340, 1088–1095. (2008).
- [76] U.F. Mayer., *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*. Commun. Anal. Geom. 6, 199-253. (1998).
- [77] U. Kohlenbach., L. Leustean., *Mann iterates of directionally nonexpansive mappings in hyperbolic spaces*. Abstract and Applied Analysis. vol 8, 449-477, Hindawi, (2003).
- [78] U. Kohlenbach, *logical metatheorems with applications in functional analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. 357, 89–128 (electronic). (2005).
- [79] V. Berinde., *On the Convergence of the Ishikawa Iteration in the Class of Quasi Contractive Operators*. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 73, 119–126. (2004).
- [80] V. Berinde., F. Takens., *Iterative approximation of fixed points*. Berlin: Springer. (Vol. 1912, pp. xvi+-322) (2007).
- [81] W.A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, 1004-1006, 72 (1965).
- [82] W.A. Kirk, *An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 640-642, 82 (1981).
- [83] W.G. Dotson., *On the Mann iterative process*. Trans. Amer. Math. Soc., 149, 65–73 (1970).
- [84] W. Kumam, N. Pakkaranang, P. Kumam and P. Chalamjiak., *Convergence analysis of modified Picard-S hybrid iterative algorithms for total asymptotically nonexpansive mappings in Hadamard spaces*, Int. J. Comput. Math. 1–14. (2018).
- [85] W.A. Kirk., *Geodesic geometry and fixed point theory, in Seminar of Mathematical Analysis* (Malaga/Seville, 2002/2003). Colecc. Abierta. 64 (Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville), 195–225 (2003).

- [86] W.A Kirk., N. Shahzad., *Fixed point theory in distance spaces* (Vol. 1). Cham: Springer. (2014).
- [87] W.A. Kirk, B. Panyanak., *A concept of convergence in geodesic spaces*, *Nonlinear Anal.* 68, 3689–3696. (2008).
- [88] W.A. Kirk., *Krasnoselskii's iteration process in hyperbolic space*. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 4, no. 4, 371–381. (1981/1982).
- [89] W. Takahashi., *A convexity in metric space and nonexpansive mappings*. I, *Kōdai Math. Sem. Rep.* 22, 142–149. (1970).
- [90] W.R. Mann., *Mean value methods in iteration*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44, 506–510 (1953).
- [91] X. Qin, S. Cho., S. Kang., *A weak convergence theorem for total asymptotically pseudocontractive mappings in Hilbert spaces*, *Fixed Point Theory Appl.* 1, 859795. (2011).
- [92] Y. Alber, R. Espinola and P. Lorenzo., *Strongly convergent approximations to fixed points of total asymptotically nonexpansive mappings*. *Acta Mech. Sin.* 24, 1005–1022, (2008).
- [93] Y. Kimura., F. Kohsaka., *Spherical nonspreadingness of resolvents of convex functions in geodesic spaces*. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 18, 93–115. (2016).
- [94] Y. Kimura., F. Kohsaka., *The proximal algorithms in geodesic spaces with curvature bounded above* *Linear and Nonlinear Anal.*, 3, 133–148, (2017).
- [95] Z.B. Xu., G.F. Roach., *Characteristic Inequalities of Uniformly Convex and Uniformly Smooth Banach Spaces*, *J. Math. Anal. Appl.* 157, 189-210. (1991).