



UNIVERSIDAD DE JAÉN

**FACULTAD DE CIENCIAS
EXPERIMENTALES
DEPARTAMENTO DE
ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN
OPERATIVA**

TESIS DOCTORAL

**APLICACIÓN DEL PROCESAMIENTO
AMPLIAMENTE LINEAL A LA MODELIZACIÓN
Y ESTIMACIÓN DE SEÑALES COMPLEJAS**

**PRESENTADA POR:
JUAN ANTONIO ESPINOSA PULIDO**

**DIRIGIDA POR:
DR. D. JESÚS NAVARRO MORENO
DRA. DÑA. ROSA MARÍA FERNÁNDEZ ALCALÁ**

JAÉN, 2 DE JUNIO DE 2014

ISBN 978-84-8439-870-7

UNIVERSIDAD DE JAÉN



Departamento de Estadística e
Investigación Operativa

**APLICACIÓN DEL PROCESAMIENTO
AMPLIAMENTE LINEAL A LA
MODELIZACIÓN Y ESTIMACIÓN DE
SEÑALES COMPLEJAS**

TESIS DOCTORAL

Juan Antonio Espinosa Pulido
2014

**APLICACIÓN DEL PROCESAMIENTO
AMPLIAMENTE LINEAL A LA
MODELIZACIÓN Y ESTIMACIÓN DE
SEÑALES COMPLEJAS**

TESIS DOCTORAL

Juan Antonio Espinosa Pulido

V.B
El Director de la Tesis

V.B
La Directora de la Tesis

Fdo:
Prof. Dr. J. Navarro Moreno

Fdo:
Prof^a. Dra. R.M. Fernández Alcalá

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E
INVESTIGACIÓN OPERATIVA

UNIVERSIDAD DE JAÉN

2014

“A mis padres, Antonio y Elvira”

Prólogo

La teoría de señales aleatorias complejas tiene una especial importancia en el campo del procesamiento estadístico de la señal. En concreto, son útiles en ámbitos tan diversos como óptica, oceanografía, meteorología, mecánica cuántica, electromagnetismo y comunicaciones.

El procesamiento clásico de señales aleatorias complejas asume que éstas son propias, es decir, su función complementaria es idénticamente igual a cero. Sin embargo, esta afirmación no siempre está justificada. La naturaleza impropia de algunas señales requiere que su función complementaria sea tenida en cuenta para describir y caracterizar, completamente, sus propiedades de segundo orden. Por ejemplo, en la modulación por desplazamiento de fase binaria (BPSK) se producen señales de comunicación impropias. La naturaleza particular de la señal determina el tipo de tratamiento que se debe seguir en su estudio. De este modo, el procesamiento denominado ampliamente lineal (AL) es el enfoque apropiado para estudiar señales aleatorias complejas impropias, en contraste con el procesamiento convencional o estrictamente lineal (EL), el cual es el idóneo para el estudio de señales complejas propias.

La metodología AL es relativamente reciente y ha aportado mejoras considerables en relación al tratamiento EL en diversas áreas del procesamiento de la señal tales como estimación, modelización, detección, ecualización y demodulación en accesos múltiples por división de códigos con secuencia directa (DS-CDMA), frecuencia y tiempo (F-TDMA), y sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). La característica más notable del tratamiento AL radica en que considera la información de la señal aumentada, es decir, el análisis se basa en un vector aleatorio cuyas componentes son la propia señal y su conjugada.

La modelización de sistemas AL, en el campo complejo, fue inicialmente tratada por Picinbono y Bondon (1997) desde el punto de vista discreto. Los autores analizaron los sistemas AL de medias móviles (MA) para modelizar señales aleatorias complejas impropias estacionarias de segundo orden. Este tipo de señales, que se caracteriza por tener una función complementaria no nula, comenzó a tomar relevancia en oceanografía y geofísica, siendo en la actualidad de gran utilidad en aplicaciones relacionadas con otras áreas de investigación tales como acústica, óptica y comunicaciones, entre otros ejemplos (vease Mandic y Goh, 2009).

Posteriormente, estos sistemas fueron extendidos a sistemas AL auto-regresivos de medias móviles (ARMA) (Navarro-Moreno, 2008) y sistemas ARMA no lineales (Mandic y Goh, 2009). Más recientemente, Navarro-Moreno et al. (2010) introducen los modelos de función de transferencia AL como generalización de los anteriores.

Desde el punto de vista práctico, un tipo de señales aleatorias fáciles de modelizar y analizar, son aquellas que verifican la condición de Markov. La principal característica de las señales de Markov es que el desarrollo futuro de éstas, sólo depende de los estudios actuales y no de su historial hasta ese momento. Este tipo de señales incluyen aplicaciones interesantes y han proporcionado soluciones eficientes en las áreas de la estimación y detección de señales (véase, por ejemplo, Kailath et al.(2000) y Poor (1994)).

En la teoría de estimación lineal, cuando los procesos a estudiar no son Gaussianos, una clase de procesos estocásticos de interés, desde el punto de vista práctico, son los procesos de Markov en sentido débil. El concepto de señal aleatoria compleja de Markov en sentido débil (MSD) es más fácil de comprobar que la condición de (estrictamente) Markov, ya que se basa sólo en las características de segundo orden del proceso (Doob, 1953). En general, los procesos MSD (con la excepción de los procesos Gauss-Markov) no son de Markov en el sentido estricto. La equivalencia entre la condición MSD y la representación de espacio de estados de la señal es lo que realmente hace a las señales MSD especialmente atractivas en el procesamiento de la señal (Kailath et al., 2000).

El principal inconveniente que surge es que, en general, para el estudio de señales complejas MSD se utiliza un tratamiento EL. Ahora bien, la naturaleza impropia de la mayoría de estas señales, nos hace considerar las señales aumentadas para describir completamente sus propiedades de segundo orden.

Así, el primer objetivo de esta Tesis Doctoral es extender el concepto MSD a señales impropias, lo que da lugar al concepto de señales de Markov ampliamente lineales (MAL). Es interesante el caracterizar estas señales en

base a sus propiedades de segundo orden y sus representaciones de espacios de estado, así como abordar su aplicación a diversas áreas del procesamiento de la señal tales como la simulación y estimación.

Por otro lado, en el procesamiento de señales aleatorias, el problema de estimar una señal compleja observada en presencia de ruido, ha sido un campo de investigación muy tratado durante el siglo pasado, a partir de las obras de Wiener y Kalman. En la teoría de la estimación, el procesamiento AL fue introducido por Picinbono y Chevalier (1995) para sistemas lineales en tiempo discreto. Bajo el criterio de mínimo error en media cuadrática, los autores consideran que el estimador óptimo de la señal de interés puede expresarse como una función lineal del vector aumentado, formado por el proceso de observación y su conjugado, y demuestran que este estimador AL supera al estimador EL convencional en el sentido de producir un menor error. Este hecho ha llevado a desarrollar una teoría de estimación AL paralela a la teoría clásica de estimación EL.

En este contexto, se han propuesto algoritmos de estimación AL para el cálculo eficiente del estimador óptimo, bajo la imposición de hipótesis estructurales en las funciones de correlación implicadas. Siguiendo esta filosofía, se han desarrollado diferentes algoritmos para los problemas de filtrado y de predicción AL.

Atendiendo al caso discreto, los libros de Mandic y Goh (2009), Adali y Haykin (2010) y el de Xia et al. (2010) proporcionan filtros adaptativos complejos lineales y no lineales en modelos AL siendo considerados como textos de referencia en este ámbito.

Así mismo, en la literatura podemos encontrar algoritmos de predicción AL tales como los propuestos en Picinbono y Bondon (1997), Navarro-Moreno (2008) y Navarro-Moreno et al. (2011) para modelos complejos autorregresivos, autorregresivos de media móvil y modelos de función de transferencia, respectivamente. Además, al extender la propiedad de estacionariedad de señales complejas, se han propuesto algoritmos recursivos de filtrado y predicción AL (Navarro-Moreno et al., 2009) para señales estacionarias de segundo orden. Más recientemente, se ha aplicado un tratamiento AL en el diseño de algoritmos de predicción, lineales y no lineales, para un nuevo tipo de señales con covarianza finito-dimensional, denominadas ampliamente factorizables (Fernández-Alcalá et al., 2012).

Las señales ampliamente factorizables se caracterizan porque la función de correlación aumentada (correspondiente al vector aumentado por la señal y su conjugada) es un núcleo factorizable. Este tipo de señales engloban tanto a procesos estacionarios como no estacionarios y surgen de manera natural en un número importante de fenómenos físicos de campos tan diver-

sos como la sismología, la oceanografía, la teoría electromagnética, acústica, óptica, geodesia, entre otros. Ejemplos específicos de señales ampliamente factorizables pueden encontrarse en Fernández-Alcalá et al.(2012).

Un problema de estimación de gran interés, diferente al de filtrado y predicción, es el problema de alisado. Estos problemas de alisado son importantes en muchos contextos científicos y con diferentes objetivos en mente, de hecho, aparecen generalmente en estudios de re-análisis o retrospectivos. Por ejemplo, se aplican para determinar el valor inicial de un sistema dinámico o en la reconstrucción de procesos desconocidos (Snyder, 1972).

Nuestro segundo objetivo en esta Tesis Doctoral es analizar el problema de alisado para señales ampliamente factorizables en sistemas lineales y no lineales, siguiendo la metodología del trabajo de Fernández-Alcalá et al.(2012).

Destacar que los capítulos segundo y tercero, suponen la parte novedosa de esta memoria. En estos se introduce y caracteriza la condición MAL para señales impropias y su aplicación a la estimación y simulación. Por último, se proponen algoritmos de alisado de punto fijo lineales y no lineales para señales ampliamente factorizables.

Todos estos enfoques nos llevan a pretender en esta memoria como objetivo principal, la aplicación del tratamiento ampliamente lineal a la modelización y estimación de señales de Markov y señales ampliamente factorizables. Este objetivo general se logra a través de los siguientes objetivos específicos:

1. Introducir las señales complejas MAL y nuevas formas de modelización de las mismas.
2. Desarrollar procedimientos de estimación para señales MAL.
3. Aplicar nuevas técnicas de simulación para señales MAL.
4. Diseñar algoritmos de alisado lineal para señales ampliamente factorizables.
5. Proponer expresiones para el error asociado a los estimadores anteriores.
6. Extender los resultados del problema de estimación para señales ampliamente factorizables al caso no lineal.
7. Simular y validar las soluciones propuestas mediante ejemplos de laboratorio, comparándolas con las metodologías existentes.

Así, esta memoria ha sido organizada como sigue:

Capítulo 1

En el primer capítulo se introducirán los conceptos básicos de la teoría asociada a las señales aleatorias complejas, necesarios para el posterior desarrollo de la memoria. Así mismo, se analizarán las distintas soluciones al problema de estimación lineal en tiempo discreto existentes en la literatura bajo una perspectiva AL.

Capítulo 2

En este capítulo se desarrollarán los objetivos 1, 2, 3 y 7. En primer lugar, se muestra la carencia en la definición clásica MSD cuando se trabaja con señales complejas impropias, sugiriéndose además una generalización para las mismas. Por ello, a través de un procesamiento ampliamente lineal, se extiende la anterior definición al nuevo concepto MAL, que se basa en propiedades de segundo orden o en las representaciones de espacio de estados. Por otra parte, se analiza la estructura de correlación de estas señales y se muestran interesantes resultados sobre la modelización, tanto en direcciones de tiempo hacia adelante como hacia atrás. Como aplicación de este tipo de señales, presentaremos algunos algoritmos recursivos de estimación para los problemas de alisado, filtrado y predicción, obtenidos a partir del filtro de Kalman, ilustrando el comportamiento de los resultados propuestos con un ejemplo numérico en las áreas de estimación y simulación.

Los principales resultados de este capítulo se han publicado en el siguiente trabajo:

- ESPINOSA PULIDO, J.A., NAVARRO-MORENO, J., FERNÁNDEZ-ALCALÁ, R.M. Y RUIZ-MOLINA, J.C.(2012). Widely Linear Markov Signals. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, (2012), 2012:256, doi:10.1186/1687-6180-2012-256, <http://asp.eurasipjournals.com/content/2012/1/256>.

Además, parte de este estudio fue presentado en el congreso

- International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences

Título: Generalization of the Wide-Sense Markov Concept to a Widely Linear Processing

Autores: Espinosa-Pulido, J.A., Navarro-Moreno, J., Fernández-Alcalá, R.M., Ruiz-Molina, J.C., Oya-Lechuga, A. y Ruiz-Fuentes, N.

Referencia: Abstract Book IC-MSQUARE 2013

Organizador: International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences (IC-MSQUARE)

Lugar y año de celebración: Praga, República Checa (2013)

Capítulo 3

Los objetivos que se abordarán en este capítulo son el 4, 5, 6 y 7. Así, estudiaremos el problema de estimación de alisado de punto fijo para señales impropias, llamadas ampliamente factorizables. Recordemos que estas señales se caracterizan porque la función de correlación del vector ampliado, formado por la señal y su conjugado, es un núcleo factorizable. Para este tipo de señales, el procesamiento AL, es el enfoque más adecuado teniendo en cuenta la información completa de la función de correlación aumentada. Por tanto, a partir sólo del conocimiento de las propiedades de segundo orden de los vectores aumentados implicados, se proporcionan algoritmos de alisado de punto fijo, lineales y no lineales, sin la necesidad de postular un modelo de espacio de estados. Además, en el caso lineal, se proponen las fórmulas recursivas para calcular el error de estimación asociado. Por último, se finaliza con dos ejemplos numéricos, uno para el caso lineal y otro para el no lineal, que ilustran el comportamiento de los resultados propuestos anteriormente.

Los principales resultados de este capítulo se han publicado en el siguiente trabajo:

- FERNÁNDEZ-ALCALÁ, R.M., NAVARRO-MORENO, J., RUIZ-MOLINA, J.C. Y ESPINOSA PULIDO, J.A. (2013). Linear and Nonlinear Smoothing Algorithms for Widely Factorizable Signals. *Signal Processing*, **93**, 897–903.

Parte de este estudio fue presentado en el congreso

- Título: A WL Smoothing Algorithm for Nonlinear Systems

Autores: Espinosa-Pulido, J.A., Navarro-Moreno, J., Fernández-Alcalá, R.M., Ruiz-Molina, J.C. y Oya-Lechuga, A.

Referencia: Abstract Book WASET 2013, pag. 1535

Organizador: WASET, World Academy of Science, Engineering and Technology

Lugar y año de celebración: Estocolmo, Suecia (2013)

Capítulo 4

Este capítulo recogerá las conclusiones a los que se ha llegado tras la finalización de esta memoria, así como las líneas abiertas a las que ha dado lugar y en las que se seguirá investigando posteriormente.

Para concluir este prólogo, me gustaría mostrar mi agradecimiento más profundo y sincero a las diferentes personas que de alguna manera han contribuido a que este trabajo sea una realidad.

Por un lado, al Profesor Dr. Jesús Navarro Moreno y a la Profesora Dra. Rosa María Fernández-Alcalá, directores de esta memoria, sin cuya inestimable dirección, esfuerzo y contribución, este trabajo no hubiera sido posible. Muchas gracias por vuestra ayuda profesional y constante colaboración.

Finalmente, no encuentro palabras para expresar lo que ha significado para mi el continuo apoyo y ánimo recibido por Marisi, por mi madre, por Pablo, por mis hermanos, Eva y José Carlos y por Juan Antonio. Gracias por estar ahí siempre.

Jaén, marzo de 2014

Índice general

1. Revisión del Problema de Estimación AL	3
1.1. Introducción	3
1.2. Generalidades	4
1.3. Solución de Picinbono y Chevalier	8
1.4. Estimación AL de Señales ESO	10
1.5. Predicción Lineal de Sistemas AL	12
1.5.1. Predicción en una Etapa	12
1.5.2. Predicción en s Etapas, $s > 1$	13
1.6. Filtro de Kalman Aumentado	15
1.7. Filtro de Kalman Extendido Aumentado	16
1.8. Predicción para Señales Ampliamente Factorizables	16
1.8.1. Solución Lineal	17
1.8.2. Solución no Lineal	18
2. Señales de Markov AL	21
2.1. Introducción	21
2.2. Señales MAL	22
2.3. Estructura de Correlación de Señales $MAL(n)$	26
2.4. Modelización de Señales $MAL(n)$	28
2.5. Problema de Estimación de Señales $MAL(n)$	31
2.5.1. Casos de Predicción y Filtrado	32
2.5.2. Caso de Alisado	33
2.6. Ejemplo Numérico	34
3. Algoritmos de Alisado AL para Señales Ampliamente Factorizables	39
3.1. Introducción	39
3.2. Algoritmo de Alisado de Punto Fijo AL	40
3.2.1. Caso Lineal	40

3.2.2. Caso no Lineal	44
3.3. Ejemplos Numéricos	46
3.3.1. Ejemplo 1: Caso Lineal	46
3.3.2. Ejemplo 2: Caso no Lineal	48
4. Conclusiones y Lineas Abiertas	51
4.1. Introducción	51
4.2. Capítulo 1	51
4.3. Capítulo 2	52
4.4. Capítulo 3	52
4.5. Lineas Abiertas	53
Bibliografía	56

Capítulo 1

Revisión del Problema de Estimación AL

1.1. Introducción

Las señales aleatorias complejas son de gran utilidad en diversas áreas del procesamiento de la señal. Existen infinidad de aplicaciones prácticas que necesitan de una formulación compleja. Por ejemplo, la detección de maremotos o tsunamis necesita del análisis armónico para establecer las diferencias entre las ondas producidas por éstos y las ondas asociadas a olas y mareas. Otra posible aplicación se encuentra dentro del campo de las comunicaciones móviles. Muchos de los algoritmos usados en transmisiones digitales de datos, tales como el CMA (algoritmos de módulo constante), trabajan en el campo complejo.

En un principio se podría pensar que una señal aleatoria compleja no es más que una combinación de dos señales reales, y por tanto, que la teoría de señales complejas es una mera extensión del caso real bidimensional. Sin embargo, existen dos razones importantes para la aplicación de un formalismo complejo en lugar de uno real.

Por un lado, existen determinados sistemas físicos que no pueden analizarse desde una perspectiva real, por ejemplo, aquellas magnitudes que representan movimiento en el plano tales como corrientes oceanográficas o meteorológicas (Rubin-Delanchy y Walden, 2008). Por otro, el uso de técnicas complejas proporciona en muchos casos una mayor sencillez y ahorro de la complejidad en los desarrollos matemáticos involucrados.

En este capítulo se recogen los contenidos necesarios para el desarrollo del resto de la memoria. La exposición de los conceptos y de sus propie-

dades se realizará de una forma concisa, considerando únicamente aquellos aspectos más destacables.

Recordemos que en el prólogo se indicó que atendiendo a la naturaleza de la señal se debe realizar el tratamiento adecuado: EL para el caso propio y AL para el impropio. A lo largo de esta memoria se supondrá que las señales de interés son impropias y por ello, trabajaremos utilizando la metodología AL. En este contexto se repasan las principales soluciones que se pueden encontrar en la literatura dentro del campo de la estimación AL, tanto lineal como no lineal, bajo una formulación discreta.

Comenzaremos en la sección segunda introduciendo los conceptos básicos sobre señales aleatorias complejas de segundo orden. Continuaremos, en la sección tercera, con una breve descripción de la solución propuesta por Picinbono y Chevalier (1995) para el problema de estimación lineal en tiempo discreto, que supuso un punto de partida en la estimación AL, analizando, a partir de este momento, las distintas soluciones al problema de estimación lineal en tiempo discreto existentes en la literatura bajo una perspectiva AL.

Uno de los principales objetivos en el campo de la estimación ha sido la investigación de modelos eficientes desde el punto de vista computacional para el cálculo del estimador óptimo. En este sentido, es habitual el desarrollo de algoritmos recursivos de estimación bajo la imposición de hipótesis estructurales sobre las correlaciones de los procesos implicados. Así, en la sección cuarta, se presentan diferentes algoritmos de estimación AL para los problemas de filtrado y predicción de señales estacionarias de segundo orden (ESO) discretas. Del mismo modo, en la sección quinta, se examinan soluciones para el caso de predicción lineal de los denominados sistemas AL propuestos en Navarro-Moreno (2008).

En las secciones sexta y séptima, se presentan las extensiones desarrolladas por Goh y Mandic (2007) y Mandic y Goh (2009), de los conocidos filtro de Kalman y filtro de Kalman Extendido (EKF) utilizando una metodología AL.

Finalizaremos analizando, en la sección octava, la predicción para señales ampliamente factorizables desarrollada en Fernández-Alcalá et al. (2012).

1.2. Generalidades

A continuación, exponemos los conceptos y resultados fundamentales que se utilizarán a lo largo de este trabajo. Puesto que éste se ha desarrollado dentro del ámbito de la comunicación estadística, utilizaremos el

término *señal aleatoria* para referirnos a un conjunto temporal de variables aleatorias x_t . El conjunto de subíndices lo notaremos T , el cual será discreto.

En lo sucesivo haremos uso de la siguiente notación. Las letras mayúsculas en negrita se utilizarán para referirse a matrices y las letras minúsculas en negrita para referirse a vectores. La fila j de cualquier matriz $\mathbf{A}(\cdot)$ se denota por $\mathbf{A}_{[j]}(\cdot)$, el n -vector de ceros por $\mathbf{0}_n$ y la $n \times m$ -matriz de ceros por $\mathbf{0}_{n \times m}$. Similarmente, la $q \times q$ -matriz identidad se representa $\mathbf{I}_{q \times q}$. Además, los superíndices $*$, $'$ y \mathbf{H} representan el complejo conjugado, transpuesto y complejo transpuesto, respectivamente. La parte real de un número complejo se denotará $\Re\{\cdot\}$.

Finalmente, el estimador lineal de mínimo error en media cuadrática de una señal x_t en función de cualquier conjunto de observaciones $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}\}$ se denota como $\hat{x}(t|t_1, t_2, \dots, t_m)$, refiriéndonos a él como el estimador EL. Asimismo, el espacio lineal generado por el conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_t, t \in T\}$ se representa $\overline{\text{sp}}\{\mathbf{x}_t, t \in T\}$.

Definición 1.1. Consideremos dos señales aleatorias reales discretas $\{x_{1t}, t \in T\}$ e $\{x_{2t}, t \in T\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) . Entonces a $x_t = x_{1t} + jx_{2t}$ se la denomina señal aleatoria compleja discreta con $j = \sqrt{-1}$.

Sin pérdida de generalidad, asumiremos que todas las señales son centradas y de segundo orden, es decir, se verifica que $E[x_t] = E[x_{1t}] + jE[x_{2t}] = 0$ y $E[|x_t|^2] = E[x_t x_t^*] < \infty$, para todo $t \in T$.

Definición 1.2. Se define la función de correlación de una señal x_t como $r_x(t, s) = E[x_t x_s^*]$. Similarmente, la función de correlación de una señal aleatoria compleja vectorial $\mathbf{x}_t = [x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(q)}]'$ se define como $\mathbf{R}_x(t, s) = E[\mathbf{x}_t \mathbf{x}_s^{\mathbf{H}}]$.

Definición 1.3. Se define la función de correlación cruzada entre dos señales x_t e y_t como $r_{xy}(t, s) = E[x_t y_s^*]$.

Además, $\mathbf{R}_{xy}(t, s) = E[\mathbf{x}_t \mathbf{y}_s^{\mathbf{H}}]$ denota la función de correlación cruzada entre dos señales aleatorias complejas vectoriales $\mathbf{x}_t = [x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(q)}]'$ e $\mathbf{y}_t = [y_t^{(1)}, \dots, y_t^{(p)}]'$. Análogamente, $\mathbf{r}_{xy}(t, s) = E[x_t \mathbf{y}_s^{\mathbf{H}}]$ representa la función de correlación cruzada entre la señal aleatoria x_t y el vector \mathbf{y}_t .

En el caso real, las propiedades de segundo orden de una señal aleatoria vienen caracterizadas por su función de correlación. Sin embargo, en el caso complejo, para tener una descripción completa de las características de segundo orden de la señal, es necesario introducir la función complementaria.

Definición 1.4. Se define la función complementaria de la señal x_t como $c_x(t, s) = E[x_t x_s]$. Similarmente, en el caso multidimensional $\mathbf{C}_x(t, s) = E[\mathbf{x}_t \mathbf{x}_s']$.

Aquellas señales aleatorias cuya función complementaria es nula se denominan señales aleatorias propias. En caso contrario, se dice que son impropias.

Definición 1.5. El vector $\mathbf{x}_t = [x_t, x_t^*]'$ y su función de correlación $\mathbf{R}_x(t, s)$ reciben el nombre de señal y función de correlación aumentada, respectivamente.

Un concepto de especial relevancia en el campo complejo es la estacionariedad de segundo orden. Se trata de una generalización de la propiedad de estacionariedad débil para señales reales al caso de señales complejas impropias.

Definición 1.6. Una señal aleatoria compleja $\{x_t, t \in T\}$ se dice débilmente estacionaria si verifica que su función de correlación $r_x(t, s)$ depende únicamente de $t - s$. Si además, su función complementaria $c_x(t, s)$ también depende únicamente de $t - s$ se denomina estacionaria de segundo orden (ESO).

Esta propiedad aporta notables mejoras en diferentes áreas del procesamiento de señales, tales como estimación, simulación, detección y modelización de señales. Concretamente, en el campo de la modelización se han introducido los sistemas AL para representar datos complejos discretos (Picinbono y Bondon, 1997).

Definición 1.7. Una señal aleatoria compleja discreta x_t se modeliza mediante un sistema AL si verifica la ecuación

$$x_t = \sum_{j=1}^p (g_{1j} x_{t-j} + g_{2j} x_{t-j}^*) + \sum_{j=0}^q (h_{1j} w_{t-j} + h_{2j} w_{t-j}^*) \quad (1.1)$$

donde w_t es un ruido centrado doblemente blanco, es decir,

$$\begin{aligned} r_w(t, \tau) &= e_1 \delta_{t\tau} \\ c_w(t, \tau) &= e_2 \delta_{t\tau} \end{aligned}$$

con $|e_2| < |e_1|$.

En Picinbono y Bondon (1997) se realiza un análisis exhaustivo de las propiedades de este tipo de sistemas. Se prueba que las señales ESO pueden obtenerse como la salida de un modelo del tipo (1.1) donde el ruido w_t es propio, es decir, $e_2 = 0$. Además, se demuestra que, en general, una señal ESO no se puede modelizar a través de un sistema lineal clásico tal y como ocurre en el caso real.

Por otro lado, dentro del ámbito estadístico, la condición de Markov para señales aleatorias complejas resulta enormemente interesante por las simplificaciones matemáticas que conlleva y que ofrece a los campos de la modelización y estimación de este tipo de señales.

Para una señal aleatoria compleja de Markov $\{x_t, t \in T\}$, se verifica la siguiente identidad para la media condicionada:

$$E[x_t | x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}] = E[x_t | x_{t_1}], \quad t > t_1 > \dots > t_m$$

Doob (1953) introdujo un concepto más débil basado en el estimador EL, que ha recibido una gran atención en la literatura (vease, por ejemplo, Beutler, 1963; Kailath et al., 2000; Kasprzyk y Szczotka, 2006; Mandrekar, 1968).

Definición 1.8. *Se dice que una señal aleatoria compleja $\{x_t, t \in T\}$ es MSD si, y sólo si, $\hat{x}(t | \tau \leq s) = \hat{x}(t | s)$ para cualquier $s < t$.*

Estas señales tienen propiedades notables. Por ejemplo, Beutler (1963) mostró que una señal x_t es MSD si, y sólo si, la función

$$\bar{k}(t, s) = r(t, s)r^{-1}(s, s)$$

verifica la propiedad triangular, es decir,

$$\bar{k}(t, s) = \bar{k}(t, \tau)\bar{k}(\tau, s), \quad t \geq \tau \geq s \quad (1.2)$$

Otra caracterización en términos de los denominados modelos de espacio de estados se puede encontrar en Kailath et al. (2000). Se demuestra que una señal $\{x_t, t \geq 0\}$ es MSD si, y sólo si, verifica el modelo de espacio de estados

$$x_{t+1} = \bar{k}(t+1, t)x_t + u_t \quad (1.3)$$

donde u_t es un ruido blanco incorrelado con x_0 . La definición de Doob fue posteriormente generalizada en Kasprzyk y Szczotka (2006) tal y como se indica a continuación.

Definición 1.9. Una señal aleatoria compleja $\{x_t, t \in T\}$ es una señal MSD de orden $n \geq 1$ si $\hat{x}(t|\tau \leq s) = \hat{x}(t|s, s-1, \dots, s-n+1)$ para cualquier $s < t$ y se denota por $MSD(n)$.

Para acabar esta sección, en las dos siguientes definiciones, introducimos las condiciones de factorizable y ampliamente factorizable para señales aleatorias complejas, caracterizadas porque su función de correlación y su función de correlación aumentada, respectivamente, son núcleos factorizables.

Este tipo de señales son muy generales e incluyen tanto señales estacionarias como no estacionarias. Estas han sido ampliamente utilizadas en el diseño de algoritmos recursivos de estimación.

Definición 1.10. Una señal $\{x_t, t \in T\}$ se dice que es factorizable si existen dos vectores l -dimensionales $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ de tal manera que su función de correlación $r_x(t, s)$ tiene la expresión

$$r_x(t, s) = \begin{cases} \alpha'(t)\beta^*(s), & t \geq s \\ \beta'(t)\alpha^*(s), & t \leq s \end{cases} \quad (1.4)$$

Para el caso más general de señales complejas impropias, es posible una nueva clase de señales mediante la imposición de la condición de núcleo factorizable en la función de correlación aumentada $\mathbf{R}_x(t, s)$.

Definición 1.11. Una señal $\{x_t, t \in T\}$ se dice que es ampliamente factorizable si, y sólo si, existen dos matrices $2 \times m$ -dimensionales $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ de tal manera que la función de correlación $\mathbf{R}_x(t, s)$ del vector aumentado \mathbf{x}_t se puede expresar en la forma

$$\mathbf{R}_x(t, s) = \begin{cases} \mathbf{A}(t)\mathbf{B}^H(s), & t \geq s \\ \mathbf{B}(t)\mathbf{A}^H(s), & t \leq s \end{cases} \quad (1.5)$$

Destacar que la condición (1.5) implica (1.4), sin embargo, la condición (1.4) no asegura que la función de correlación del vector ampliado satisfaga (1.5). Como consecuencia, tenemos que todas las señales que son ampliamente factorizables también son factorizables, pero la inversa no se cumple.

1.3. Solución de Picinbono y Chevalier

El procesamiento AL de señales aleatorias complejas para el problema de estimación lineal fue introducido en Picinbono y Chevalier (1995) bajo

una formulación discreta. En su trabajo trataron el tema de regresión lineal demostrando la superioridad del procesamiento AL frente al EL.

Consideremos una variable aleatoria compleja x y un vector aleatorio complejo \mathbf{y} de dimensión q . Es conocido que el estimador óptimo de x basado en \mathbf{y} que minimiza el error cuadrático medio es la media condicionada $E[x|\mathbf{y}]$. Además, si $[\mathbf{y}', x]'$ es un vector real normal entonces este estimador es una función lineal de la forma $\hat{x} = \mathbf{h}'\mathbf{y}$. En el caso normal complejo, esto último ya no se verifica. Ahora, la esperanza condicionada es una función lineal del vector $\mathbf{y} = [\mathbf{y}', \mathbf{y}^H]'$, es decir, $\hat{x}^{AL} = \mathbf{u}^H\mathbf{y} + \mathbf{v}^H\mathbf{y}^*$.

En Picinbono y Chevalier (1995) se realiza una comparativa de ambos estimadores demostrando que bajo el criterio de los mínimos cuadrados, el estimador nuevo \hat{x}^{AL} , que se denominará estimador AL, mejora al estimador clásico (EL) \hat{x} presentando un menor error.

En el teorema siguiente se resumen las propiedades del estimador \hat{x}^{AL} y su error asociado.

Teorema 1.1. *Consideremos los estimadores EL, $\hat{x} = \mathbf{h}'\mathbf{y}$, y AL, $\hat{x}^{AL} = \mathbf{u}^H\mathbf{y} + \mathbf{v}^H\mathbf{y}^*$. Entonces los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [\mathbf{R} - \mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}^*]^{-1} [\mathbf{r} - \mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s}^*] \\ \mathbf{v} &= [\mathbf{R}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}]\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= E[\mathbf{y}\mathbf{y}^H] \\ \mathbf{C} &= E[\mathbf{y}\mathbf{y}'] \\ \mathbf{r} &= E[x^*\mathbf{y}] \\ \mathbf{s} &= E[x\mathbf{y}]\end{aligned}$$

El error asociado a \hat{x}^{AL} es

$$p^{AL} = E[|x - \hat{x}^{AL}|^2] = E[|x|^2] - (\mathbf{u}^H\mathbf{r} + \mathbf{v}^H\mathbf{s}^*)$$

Además, si denotamos el error correspondiente a \hat{x} por $p = E[|x - \hat{x}|^2]$, entonces

$$p - p^{AL} = [\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}]^H [\mathbf{R}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{s}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}] \geq 0$$

En el siguiente corolario se analizan algunos casos particulares interesantes.

Corolario 1.1.

[a] Si x e \mathbf{y} son conjuntamente propios, es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{0}_{q \times q}$ y $\mathbf{s} = \mathbf{0}_q$, entonces $p - p^{AL} = 0$ y, por tanto, $\hat{x}^{AL} = \hat{x}$.

[b] Si \mathbf{y} es propio, es decir, $\mathbf{C} = \mathbf{0}_{q \times q}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{x}^{AL} &= \hat{x} + (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s})'\mathbf{y}^* \\ p - p^{AL} &= \mathbf{s}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{s}\end{aligned}$$

[c] Supongamos que x es real. Entonces

$$\begin{aligned}\hat{x}^{AL} &= 2\Re\{\mathbf{u}^H\mathbf{y}\} \\ p^{AL} &= E[x^2] - 2\Re\{\mathbf{u}^H\mathbf{r}\}\end{aligned}$$

En este caso, se tiene que \hat{x}^{AL} es real, mientras que \hat{x} no tiene por qué serlo.

1.4. Estimación AL de Señales ESO

En esta sección se aborda el problema de la estimación bajo las condiciones generales establecidas en Cambanis (1973b). Concretamente en Navarro-Moreno et al. (2009), se proponen diferentes algoritmos recursivos para los casos de filtrado y predicción de un funcional de la señal de interés, a partir de señales ESO.

Consideremos una señal aleatoria compleja discreta z_t que no puede observarse directamente y que el proceso observación es igual a $y_t = \mathcal{F}(z_t)$, donde el funcional \mathcal{F} transforma a z_t en una señal ESO discreta. En base a las observaciones y_t estamos interesados en estimar a través de un procesamiento AL un funcional de la señal $x_t = \mathcal{G}(z_t)$, donde x_t es una señal aleatoria compleja discreta con función de correlación $r_x(t, s)$ y función de correlación cruzada con $\mathbf{y}_t = [y_t, y_t^*]'$, $\boldsymbol{\beta}(h) = E[x_{t+h}\mathbf{y}_t^H]$. Además, $\mathbf{R}_y(h) = E[\mathbf{y}_{t+h}\mathbf{y}_t^H]$ es la función de correlación aumentada de y_t .

Se denota el estimador AL de x_{t+s} para algún $s = 0, 1, \dots$ en base a las observaciones $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t$, por

$$\hat{x}^{AL}(t+s|\tau \leq t) = \sum_{j=1}^t \boldsymbol{\Psi}_{t,j}^s \mathbf{y}_{t+1-j}$$

y su error $p_{t+s|t}^{AL} = E[|x(t+s) - \hat{x}^{AL}(t+s|\tau \leq t)|^2]$.

En el siguiente resultado se proporciona un algoritmo para calcular los coeficientes $\boldsymbol{\Psi}_{t,j}^s$.

Teorema 1.2.

$$\begin{aligned}\Psi_{t,t}^s &= \nabla_{t-1}^s \tilde{V}_{t-1,1}^{-1} \\ \Psi_{t,j}^s &= \Psi_{t-1,j}^s - \Psi_{t,t}^s \tilde{\Phi}_{t-1,t-j}, \quad j = 1, \dots, t-1\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\nabla_0^s &= \beta(s) \\ \nabla_t^s &= \beta(t+s) - \sum_{j=1}^t \beta(t+s-j) \tilde{\Phi}_{t,j}^H, \quad t \geq 1\end{aligned}$$

y las matrices $\tilde{\Phi}_{t,j}$ y $\tilde{V}_{t,1}$ se calculan a partir de la forma

$$\begin{aligned}\Phi_{t,t} &= \Delta_{t-1} \tilde{V}_{t-1,1}^{-1} \\ \tilde{\Phi}_{t,t} &= \Delta_{t-1}^H V_{t-1,1}^{-1} \\ \Phi_{t,j} &= \Phi_{t-1,j} - \Phi_{t,t} \tilde{\Phi}_{t-1,t-j}, \quad j = 1, \dots, t-1 \\ \tilde{\Phi}_{t,j} &= \tilde{\Phi}_{t-1,j} - \tilde{\Phi}_{t,t} \Phi_{t-1,t-j}, \quad j = 1, \dots, t-1\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}V_{t,1} &= V_{t-1,1} - \Phi_{t,t} \Delta_{t-1}^H \\ \tilde{V}_{t,1} &= \tilde{V}_{t-1,1} - \tilde{\Phi}_{t,t} \Delta_{t-1} \\ \Delta_t &= R_y(t+1) - \sum_{j=1}^t \Phi_{t,j} R_y(t+1-j)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}V_{0,1} &= \tilde{V}_{0,1} = R_y(0) \\ \Delta_0 &= R_y(1)\end{aligned}$$

Asimismo, el error $p_{t+s|s}^{AL}$ es igual a

$$\begin{aligned}p_{s|0}^{AL} &= r_x(s, s) \\ p_{t+s|t}^{AL} &= p_{t+s-1|t-1}^{AL} - \Psi_{t,t}^s \nabla_{t-1}^{sH} + \\ &\quad + r_x(t+s, t+s) - r_x(t+s-1, t+s-1), \quad t \geq 1\end{aligned}$$

1.5. Predicción Lineal de Sistemas AL

En esta sección se describen los algoritmos de predicción para sistemas AL desarrollados por Navarro-Moreno (2008), basados en el algoritmo de innovaciones (Brockwell y Davis, 1991, pag. 425). En primer lugar, se analiza el caso más simple de predicción en una etapa, que sirve de punto de partida para el caso general de predicción en s etapas, con $s > 1$.

1.5.1. Predicción en una Etapa

Consideremos que una señal x_t se modeliza a partir del sistema AL (1.1). El objetivo es predecir x_{t+1} , en función de las observaciones aumentadas $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t$. Se denota $\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t)$ al predictor obtenido, y a su error $p_{t+1|t}^{AL}$.

Teorema 1.3. *Sean las matrices*

$$\mathbf{G}_j = \begin{pmatrix} g_{1j} & g_{2j} \\ g_{2j}^* & g_{1j}^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_j = \begin{pmatrix} h_{1j} & h_{2j} \\ h_{2j}^* & h_{1j}^* \end{pmatrix}$$

Entonces, se tiene que

$$\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t) = [1, 0]\hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t)$$

donde

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t) = \begin{cases} \mathbf{0}_2, & t = 0 \\ \sum_{j=1}^t \boldsymbol{\theta}_{t,j}(\mathbf{x}_{t+1-j} - \hat{\mathbf{x}}(t+1-j|\tau \leq t-j)), & 1 \leq t < f \\ \sum_{j=1}^p \mathbf{G}_j \mathbf{x}_{t+1-j} + \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\theta}_{t,j}(\mathbf{x}_{t+1-j} - \hat{\mathbf{x}}(t+1-j|\tau \leq t-j)), & t \geq f \end{cases}$$

con $f = \max(p, q)$ y donde las matrices $\boldsymbol{\theta}_{t,j}$ se calculan a través del algoritmo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_{1|0} &= \mathbf{R}(1, 1) \\
 \boldsymbol{\theta}_{t,t} &= \mathbf{R}(t+1, 1) \mathbf{P}_{1|0}^{-1} \\
 \boldsymbol{\theta}_{t,t-k} &= \left(\mathbf{R}(t+1, k+1) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{\theta}_{t,t-j} \mathbf{P}_{j+1|j} \boldsymbol{\theta}_{k,k-j}^H \right) \mathbf{P}_{j+1|j}^{-1}, \quad k = 1, \dots, t-1 \\
 \mathbf{P}_{t+1|t} &= \mathbf{R}(t+1, t+1) - \sum_{j=0}^{t-1} \boldsymbol{\theta}_{t,t-j} \mathbf{P}_{j+1|j} \boldsymbol{\theta}_{t,t-j}^H
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde

$$\mathbf{R}(i, j) = \begin{cases} \mathbf{R}_x(i, j), & 1 \leq i \leq j \leq f \\ \mathbf{R}_x(i, j) - \sum_{l=1}^p \mathbf{R}_x(i, j-l) \mathbf{G}_l^H, & 1 \leq i \leq f < j \leq 2f \\ \mathbf{0}_{2 \times 2}, & 1 \leq i \leq f, j > 2f \\ \sum_{l=0}^q \bar{\mathbf{H}}_l \mathbf{E} \bar{\mathbf{H}}_{l+j-i}^H, & f < i \leq j \leq i+q \\ \mathbf{0}_{2 \times 2}, & f < i, i+q < j \\ \mathbf{R}^H(j, i), & j < i \end{cases}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2^* & e_1 \end{pmatrix} \\
 \bar{\mathbf{H}}_j &= \mathbf{H}_j, \quad j = 0, \dots, q \\
 \bar{\mathbf{H}}_j &= \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad j > q
 \end{aligned}$$

Además, el error de $\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t)$ es igual a

$$p_{t+1|t}^{AL} = [1, 0] \mathbf{P}_{t+1|t} [1, 0]'$$

donde $\mathbf{P}_{t+1|t}$ se obtiene a partir de (1.6).

1.5.2. Predicción en s Etapas, $s > 1$

El siguiente teorema generaliza el algoritmo anterior al caso de s etapas, es decir, proporciona el estimador impropio de x_{t+s} , con $s > 1$, en función de las observaciones $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t$.

Teorema 1.4. *El predictor AL en s etapas de x_{t+s} es*

$$\hat{x}^{AL}(t+s|\tau \leq t) = [1, 0]\hat{\mathbf{x}}(t+s|\tau \leq t)$$

con

$$\hat{\mathbf{x}}(t+s|\tau \leq t) = \begin{cases} \sum_{j=s}^{t+s-1} \boldsymbol{\theta}_{t+s-1,j}(\mathbf{x}_{t+s-j} - \hat{\mathbf{x}}(t+s-j|\tau \leq t+s-j-1)), & 1 \leq t \leq f-s \\ \sum_{j=1}^p \mathbf{G}_j \hat{\mathbf{x}}(t+s-j|\tau \leq t) + \sum_{j=s}^q \boldsymbol{\theta}_{t+s-1,j}(\mathbf{x}_{t+s-j} - \hat{\mathbf{x}}(t+s-j|\tau \leq t+s-j-1)), & t > f-s \end{cases}$$

donde los coeficientes $\boldsymbol{\theta}_{t,j}$ se obtienen como en (1.6). Además, el error $p_{t+s|t}^{AL}$ viene dado por

$$p_{t+s|t}^{AL} = \begin{cases} r_x(t+s, t+s) - [1, 0] \sum_{j=s}^{t+s-1} \boldsymbol{\theta}_{t+s-1,j} \mathbf{P}_{t+s-j|t+s-j-1} \boldsymbol{\theta}_{t+s-1,j}^H [1, 0]', & 1 \leq t \leq f-s \\ [1, 0] \sum_{j=0}^{s-1} \mathbf{B}_j^s \mathbf{P}_{t+s-j|t+s-j-1} \mathbf{B}_j^{sH} [1, 0]', & t > f-s \end{cases}$$

donde las matrices $\mathbf{P}_{t+1|t}$ se obtienen como en (1.6) y

$$\mathbf{B}_j^s = \sum_{i=0}^j \mathbf{K}_i \bar{\boldsymbol{\theta}}_{t+s-i-1,j-i}$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{t,0} &= \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{t,j} &= \boldsymbol{\theta}_{t,j}, \quad 1 \leq j \leq q \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{t,j} &= \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad j > q \text{ o } j < 0 \end{aligned}$$

y los coeficientes \mathbf{K}_j se calculan recursivamente de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{K}_j &= - \sum_{i=1}^j \bar{\mathbf{G}}_i \mathbf{K}_{j-i}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}}_0 &= \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \bar{\mathbf{G}}_j &= -\mathbf{G}_j, \quad 1 \leq j \leq p \\ \bar{\mathbf{G}}_j &= \mathbf{0}_{2 \times 2}, \quad j > p \quad \text{o} \quad j < 0\end{aligned}$$

1.6. Filtro de Kalman Aumentado

Consideremos el siguiente modelo de espacio de estados

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f_{t+1,t}x_t + w_t \\ y_t &= h_t x_t + v_t\end{aligned}$$

donde x_t es la señal que se desea estimar e y_t es la salida del sistema. Se supone que los ruidos w_t y v_t son ruidos blancos con varianzas q_t y r_t , respectivamente, y mutuamente independientes.

Se denota las señales aumentadas de x_t , y_t , w_t y v_t por \mathbf{x}_t , \mathbf{y}_t , \mathbf{w}_t y \mathbf{v}_t , respectivamente. El objetivo es estimar x_{t+1} en función de las observaciones $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t+1}$.

En Mandic y Goh (2009) se presenta el siguiente algoritmo basado en el filtro de Kalman para el estimador $\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t+1)$ y su error $p_{t+1|t+1}^{AL}$.

Teorema 1.5. Sean las matrices

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{t+1,t} &= \begin{pmatrix} f_{t+1,t} & 0 \\ 0 & f_{t+1,t}^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} h_t & 0 \\ 0 & h_t^* \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q}_t &= E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^H], \quad \mathbf{R}_t = E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^H]\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t+1) = [1, 0] \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t+1)$$

donde el vector $\hat{\mathbf{x}}(t|\tau \leq t)$ se obtiene de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t) &= \mathbf{F}_{t+1,t} \hat{\mathbf{x}}(t|\tau \leq t) \\ \mathbf{P}_{t+1|t} &= \mathbf{F}_{t+1,t} \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{F}_{t+1,t}^H + \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{K}_{t+1} &= \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1}^H [\mathbf{H}_{t+1} \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1}^H + \mathbf{R}_{t+1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t+1) &= \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t) + \mathbf{K}_{t+1} [\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{H}_{t+1} \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t)] \\ \mathbf{P}_{t+1|t+1} &= (\mathbf{I}_{2 \times 2} - \mathbf{K}_{t+1} \mathbf{H}_{t+1}) \mathbf{P}_{t+1|t}\end{aligned}$$

con

$$\mathbf{P}_{0|0} = E[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^H]$$

Además, el error de $\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t+1)$ es igual a

$$p_{t+1|t+1}^{AL} = [1, 0] \mathbf{P}_{t+1|t+1} [1, 0]'$$

1.7. Filtro de Kalman Extendido Aumentado

Goh y Mandic (2007) extienden la solución anterior al caso en que el modelo de espacio de estados presenta un comportamiento no lineal. Así, consideran el sistema

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f(x_t, t) + w_t \\ y_t &= a(x_t, u_t) + v_t\end{aligned}$$

donde $f(\cdot)$ y $a(\cdot)$ son funciones no lineales y u_t es una señal conocida y donde w_t y v_t son ruidos blancos con varianzas q_t y r_t , respectivamente, y mutuamente independientes. Entonces los autores proponen el estimador no lineal para x_{t+1} , $\tilde{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t+1)$, que se fundamenta en el EKF, pero en base a las observaciones aumentadas $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t+1}\}$.

Algoritmo 1.1. Consideremos las funciones

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(x_t, u_t) &= [a(x_t, u_t), a^*(x_t, u_t)]' \\ g_t &= \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}^{AL}(t|\tau \leq t)} \\ \mathbf{c}_t &= \left. \frac{\partial \mathbf{a}(x, u_t)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}^{AL}(t|\tau \leq t-1)}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t) &= f(\tilde{x}^{AL}(t|\tau \leq t), t) \\ p_{t+1|t} &= g_t p_{t|t} g_t^* + q_t \\ \mathbf{k}'_{t+1} &= p_{t+1|t} \mathbf{c}'_{t+1} [\mathbf{c}_{t+1} p_{t+1|t} \mathbf{c}'_{t+1} + \mathbf{R}_{t+1}]^{-1} \\ \tilde{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t+1) &= \tilde{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t) + \mathbf{k}'_{t+1} [\mathbf{y}_{t+1} \\ &\quad - \mathbf{a}(\tilde{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t), u_{t+1})] \\ p_{t+1|t+1} &= (1 - \mathbf{k}'_{t+1} \mathbf{c}_{t+1}) p_{t+1|t}\end{aligned}$$

En Mandic y Goh (2009) se pueden encontrar otros filtros adaptativos no lineales como el filtro Unscented de Kalman Aumentado.

1.8. Predicción para Señales Ampliamente Factorizables

Tal como indicamos previamente, las señales ampliamente factorizables son de gran interés debido a sus atractivas características. En Fernández-Alcalá et al. (2012) se desarrolla el problema de predicción para señales

ampliamente factorizables, proporcionándose un algoritmo recursivo para el cálculo del estimador óptimo de predicción AL, así como su error asociado, tanto para el caso lineal como no lineal.

1.8.1. Solución Lineal

Consideremos una señal $\{x_{t_i}, t_i \in T\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, ampliamente factorizable con función de correlación aumentada de la forma (1.5) observada a través de la ecuación lineal

$$y_{t_i} = g(t_i)x_{t_i} + v_{t_i}, \quad t_1 \leq t_i \leq t_n \quad (1.7)$$

donde $g(t_i)$ es una función determinista de valores complejos y v_{t_i} es un ruido doblemente blanco correlado con x_{t_i} . Por otra parte, se supone que la función de correlación cruzada de la señal aumentada x_{t_i} y el ruido aumentado v_{t_i} es de la forma

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xv}}(t_i, t_j) = \begin{cases} \mathbf{C}(t_i)\mathbf{D}^H(t_j), & t_i \geq t_j \\ \mathbf{E}(t_i)\mathbf{F}^H(t_j), & t_i \leq t_j \end{cases} \quad (1.8)$$

donde $\mathbf{C}(t_i)$, $\mathbf{D}(t_i)$, $\mathbf{E}(t_i)$ y $\mathbf{F}(t_i)$ son matrices de dimensiones $2 \times l$, $2 \times l$, $2 \times l'$ and $2 \times l'$, respectivamente. Se considera el problema de obtener el estimador óptimo de la señal x_{t_k} en base a la información proporcionada por las observaciones aumentadas $\{\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_n}\}$, para $t_k \geq t_n$.

Denotemos las matrices siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(t_i) &= \text{diag}(g(t_i), g^*(t_i)) \\ \mathbf{\Sigma} &= E[\mathbf{v}_{t_i}\mathbf{v}_{t_i}^H] \\ \mathbf{\Psi}(t_i) &= [\mathbf{A}(t_i), \mathbf{C}(t_i), \mathbf{0}_{2 \times l'}] \\ \mathbf{\Pi}(t_i) &= [\mathbf{B}(t_i), \mathbf{0}_{2 \times l}, \mathbf{E}(t_i)] \\ \mathbf{\Phi}(t_i) &= [\mathbf{G}(t_i)\mathbf{A}(t_i), \mathbf{G}(t_i)\mathbf{C}(t_i), \mathbf{F}(t_i)] \\ \mathbf{\Gamma}(t_i) &= [\mathbf{G}(t_i)\mathbf{B}(t_i), \mathbf{D}(t_i), \mathbf{G}(t_i)\mathbf{E}(t_i)] \end{aligned} \quad (1.9)$$

Teorema 1.6. *El estimador AL óptimo $\hat{x}^{AL}(t_k | \tau \leq t_n)$ de la señal x_{t_k} en base a las observaciones aumentadas $\{\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_n}\}$, con $t_k \geq t_n$ puede calcularse recursivamente como sigue:*

$$\hat{x}^{AL}(t_k | \tau \leq t_n) = \mathbf{\Psi}_{[1]}(t_k)\boldsymbol{\epsilon}(t_n), \quad t_k \geq t_n$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}(t_n)$ se calcula a través de la expresión

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(t_n) &= \boldsymbol{\epsilon}(t_{n-1}) + \mathbf{J}(t_n, t_n) [\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{\Phi}(t_n)\boldsymbol{\epsilon}(t_{n-1})] \\ \boldsymbol{\epsilon}(t_0) &= \mathbf{0}_q \end{aligned} \quad (1.10)$$

con $q = m + l + l'$ y $\mathbf{J}(t_n, t_n)$ dada por la ecuación

$$\mathbf{J}(t_n, t_n) = [\mathbf{\Gamma}^H(t_n) - \mathbf{Q}(t_{n-1})\mathbf{\Phi}^H(t_n)] \mathbf{\Omega}^{-1}(t_n)$$

siendo

$$\mathbf{\Omega}(t_n) = \mathbf{\Sigma} + [\mathbf{\Gamma}(t_n) - \mathbf{\Phi}(t_n)\mathbf{Q}(t_{n-1})] \mathbf{\Phi}^H(t_n) \quad (1.11)$$

y $\mathbf{Q}(t_n)$ satisfaciendo la ecuación

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t_n) &= \mathbf{Q}(t_{n-1}) + \mathbf{J}(t_n, t_n) [\mathbf{\Gamma}(t_n) - \mathbf{\Phi}(t_n)\mathbf{Q}(t_{n-1})] \\ \mathbf{Q}(t_0) &= \mathbf{0}_{q \times q} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Por otra parte, el error asociado viene dado por la expresión

$$p_{t_k|t_n}^{AL} = r_x(t_k, t_k) - \mathbf{\Psi}_{[1]}(t_k)\mathbf{Q}(t_n)\mathbf{\Psi}_{[1]}^H(t_k), \quad t_k \geq t_n \quad (1.13)$$

1.8.2. Solución no Lineal

Siguiendo un razonamiento similar al Filtro de Kalman Extendido Aumentado (AEKF), se propone también el siguiente estimador para el caso no lineal.

Así, bajo las mismas condiciones de la sección anterior, pero suponiendo que el proceso de observación se obtiene a partir de una relación no lineal de la forma

$$y_{t_i} = z(x_{t_i}, t_i) + v_{t_i}, \quad t_1 \leq t_i \leq t_n \quad (1.14)$$

donde $z(\cdot)$ es una función no lineal y la señal x_{t_i} es incorrelada con el ruido v_{t_i} , proponiendo los autores el siguiente estimador AL no lineal $\tilde{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n)$ de la señal x_{t_k} .

Algoritmo 1.2.

$$\tilde{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n) = \mathbf{A}_{[1]}(t_k)\boldsymbol{\epsilon}(t_n)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}(t_n)$ se calcula de la recursión

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}(t_n) &= \boldsymbol{\epsilon}(t_{n-1}) + \mathbf{J}(t_n, t_n) [\mathbf{y}_{t_n} - z(\tilde{x}^{AL}(t_n|\tau \leq t_{n-1}), t_n)] \\ \boldsymbol{\epsilon}(t_0) &= \mathbf{0}_m \end{aligned} \quad (1.15)$$

con

$$\mathbf{J}(t_n, t_n) = [\mathbf{B}^H(t_n) - \mathbf{Q}(t_{n-1})\mathbf{A}^H(t_n)] \mathbf{G}^H(t_n)\mathbf{\Omega}^{-1}(t_n)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}(t_n) &= \mathbf{\Sigma} + \mathbf{G}(t_n) [\mathbf{B}(t_n) - \mathbf{A}(t_n)\mathbf{Q}(t_{n-1})] \mathbf{A}^H(t_n)\mathbf{G}^H(t_n) \\ \mathbf{G}(t_n) &= \text{diag}(g(t_n), g^*(t_n)) \end{aligned} \quad (1.16)$$

con

$$g(t_n) = \left. \frac{\partial z(x, t_n)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}^{AL}(t_n | \tau \leq t_{n-1})}$$

y $\mathbf{Q}(t_n)$ satisface la ecuación recursiva

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t_n) &= \mathbf{Q}(t_{n-1}) + \mathbf{J}(t_n, t_n) \mathbf{G}(t_n) [\mathbf{B}(t_n) - \mathbf{A}(t_n) \mathbf{Q}(t_{n-1})] \\ \mathbf{Q}(t_0) &= \mathbf{0}_{m \times m} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Capítulo 2

Señales de Markov AL

2.1. Introducción

Las señales de Markov se caracterizan por la condición de que el desarrollo futuro de estas señales depende sólo de los estados actuales y no de su historial hasta ese momento. Generalmente los procesos de Markov son fáciles de modelizar y analizar, e incluyen aplicaciones interesantes. Concretamente, la estimación y detección son áreas del procesamiento de la señal, donde este tipo de procesos han proporcionado soluciones eficientes (véase, por ejemplo, Kailath et al. (2000) y Poor (1994)).

Desde el punto de vista práctico, en la teoría del procesamiento de una señal, las señales MSD son más atractivas que las señales de Markov (en sentido estricto), debido fundamentalmente a su caracterización a partir de los momentos de segundo orden del proceso (Doob, 1953) y a su correspondencia con la representación de espacio de estados (Kailath et al., 2000).

Una característica general de los trabajos dedicados al estudio de señales complejas MSD es que utilizan un tratamiento EL (véase, por ejemplo, Kailath et al. (2000), Beutler (1963), Kasprzyk y Szczotka (2006)). Sin embargo, la naturaleza impropia de la mayoría de las señales, nos obliga a considerar las señales aumentadas para describir completamente sus propiedades de segundo orden.

En este capítulo, mostraremos que la definición clásica y las caracterizaciones asociadas de las señales MSD son incorrectas para señales impropias. Esto motiva la introducción del concepto de señales MAL, para la que damos diferentes caracterizaciones, basadas tanto en propiedades de segundo orden como en las representaciones de espacios de estado, desde un punto

de vista AL. El análisis se realiza tanto en direcciones hacia delante como hacia atrás en el tiempo. También, proporcionamos una manera de comprobar la condición MAL, similar a la bien conocida propiedad triangular, y determinamos la estructura de correlación de este tipo de señales.

La parte de modelización es el objetivo fundamental de este capítulo. En este sentido, se sugieren las representaciones MAL hacia delante y hacia atrás, se estudia la interrelación entre ellos y se establece la relación con las representaciones autorregresivas AL definidas en Picinbono y Bondon (1997). Estas representaciones Markovianas también se convierten en un punto de partida para la aplicación de diferentes algoritmos recursivos de estimación. Así, la aplicación del Filtro de Kalman en las representaciones hacia delante y hacia atrás ofrece diferentes rendimientos sobre algoritmos AL de predicción, filtrado y alisado. La cuestión principal, que se ilustra a través de un ejemplo, es que además de la ganancia de rendimiento del tratamiento AL, también se obtienen mejores resultados en simulación y modelización.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección segunda, se presentan algunos antecedentes sobre señales de Markov con valores complejos, ilustrando la incapacidad de la condición MSD usual para señales impropias y sugiriéndose el concepto de señal MAL. En la sección tercera se estudia la estructura de correlación de las señales MAL. En la sección cuarta se discute el problema de modelización para las señales de MAL y se analiza el caso estacionario. El problema de estimación se aborda en la sección quinta. Por último, en la sección sexta, aplicamos nuestros resultados a los campos de simulación y estimación de señales, considerando un ejemplo numérico.

2.2. Señales MAL

Como se señaló anteriormente, en la actualidad, las actividades relacionadas con la investigación en el campo de las señales aleatorias complejas están cada vez más focalizada en el tratamiento AL que presenta un mejor rendimiento. La pregunta inmediata que surge es si el concepto clásico de señales MSD sigue siendo válido en el enfoque de procesamiento AL.

Vamos a mostrar mediante dos ejemplos sencillos que la definición clásica y las caracterizaciones asociadas a las señales MSD son incorrectas para señales impropias. Estos ejemplos motivarán la extensión del concepto de señal MSD a un enfoque AL y el estudio de nuevas caracterizaciones.

Ejemplo 2.1. Consideremos una señal $\{x_t, t \geq 0\}$, con función de correlación $r_x(t, s) = \frac{1}{2}(e^{3|t-s|} + e^{|t-s|})$ y con función complementaria $c_x(t, s) = \frac{1}{2}(e^{3|t-s|} - e^{|t-s|})$. Es fácil comprobar que $r_x(t, s)$ no satisface la propiedad triangular (1.2) y, por tanto, la señal no se puede modelizar de la forma (1.3). Sin embargo, como se expondrá más adelante, es posible encontrar una representación de espacio de estados para tales señales dada por (2.29). Así, la condición clásica de MSD es claramente insuficiente en el caso impropio para encontrar una representación de espacio de estados de la señal estudiada en este ejemplo.

Ejemplo 2.2. Supongamos $\{x_t, 1 \leq t \leq 100\}$, una señal con función de correlación y función complementaria dadas por $r_x(t, s) = (t/100 + 1)^{1/6}(s/100)^4$ y $c_x(t, s) = j(s/100)^4$, para $s \leq t$, respectivamente. En este caso, se cumple la propiedad triangular (1.2) y por tanto x_t tiene la representación

$$x_{t+1} = \left(\frac{t+101}{t+100} \right)^{1/6} x_t + u_t \quad (2.1)$$

con x_t incorrelado con u_t . Sin embargo, este modelo presenta dos importantes deficiencias en el marco del tratamiento AL: existe correlación entre el ruido u_t y x_t^* , y la información suministrada por $c_x(t, s)$ es ignorada. Ambos problemas se pueden evitar mediante la consideración de un modelo más competitivo para x_t , obtenido con la información adicional de x_t^* . De hecho, se puede escribir una representación de espacio de estados alternativa para x_t dada por (2.30). En la sección 2.6 se presentará un estudio exhaustivo acerca de la superioridad de (2.30) frente a (2.1).

A partir de estos dos ejemplos sencillos, extraemos las siguientes conclusiones: la definición clásica de una señal MSD debe extenderse para hacer frente a las señales impropias. Este nuevo concepto se debe caracterizar adecuadamente para evitar el inconveniente que se muestra en el Ejemplo 2.1. Además, se precisan nuevos resultados sobre modelización para explotar la información disponible en x_t y x_t^* , logrando así mejores modelos para la señal como se ilustra en el Ejemplo 2.2. A continuación, se presenta tal definición en un entorno del procesamiento AL.

Definición 2.1. Una señal compleja $\{x_t, t \in T\}$ se dice que es de Markov ampliamente lineal de orden $n \geq 1$, abreviadamente una señal MAL(n), si se cumple la condición

$$\hat{x}^{AL}(t|\tau \leq s) = \hat{x}^{AL}(t|s, s-1, \dots, s-n+1)$$

para cualquier $s < t$.

Observe que este concepto extiende tanto a la noción clásica de MSD introducida por Doob (1953) como a la posterior generalización dada en Kasprzyk y Szczotka (2006).

En el resto de la sección proporcionamos diferentes caracterizaciones de las señales MAL(n). Para ello, tenemos que introducir alguna notación adicional. Denotemos el vector ampliado de x_t hacia adelante de orden $n \geq 1$ como el vector $2n$ -dimensional

$$\mathbf{x}_t = [x_t, x_t^*, x_{t-1}, x_{t-1}^*, \dots, x_{t-n+1}, x_{t-n+1}^*]'$$

y su función de correlación por $\mathbf{R}_x(t, s) = E[\mathbf{x}_t \mathbf{x}_s^H]$. A partir de ahora, se asume que $\det \{\mathbf{R}_t\} \neq 0$ con $\mathbf{R}_t := \mathbf{R}_x(t, t)$. Por otra parte, definiremos la función de correlación normalizada como

$$\mathbf{K}(t, s) = \mathbf{R}_x(t, s) \mathbf{R}_s^{-1} \quad (2.2)$$

Del mismo modo, definimos el vector ampliado hacia atrás de orden $n \geq 1$ de x_t como el vector $2n$ -dimensional

$$\mathbf{x}_t^b = [x_{t+n-1}, x_{t+n-1}^*, x_{t+n-2}, x_{t+n-2}^*, \dots, x_t, x_t^*]'$$

Los siguientes resultados establecen la relación entre las señales x_t y los vectores aumentados hacia delante y hacia atrás. Empezamos con el vector ampliado hacia delante y damos una caracterización similar a (1.2) para una señal MAL(n).

Teorema 2.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. x_t es una señal MAL(n).
2. Para $s < t$, el estimador AL de \mathbf{x}_t en base al conjunto $\{\mathbf{x}_\tau, \mathbf{x}_\tau^*, \tau \leq s\}$ es de la forma

$$\hat{\mathbf{x}}^{AL}(t|\tau \leq s) = \mathbf{K}(t, s) \mathbf{x}_s \quad (2.3)$$

3. Para $t \geq \tau \geq s$,

$$\mathbf{K}(t, s) = \mathbf{K}(t, \tau) \mathbf{K}(\tau, s) \quad (2.4)$$

Demostración. Para demostrar la implicación 1) \Rightarrow 2) observar que si x_t es una señal MAL(n) entonces para cualquier $s < t$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{AL}(t|\tau \leq s) = & k_1(t, s)x_s + k_2(t, s)x_s^* + \dots + k_{2n-1}(t, s)x_{s-n+1} + \\ & + k_{2n}(t, s)x_{s-n+1}^* \end{aligned} \quad (2.5)$$

lo que implica que $\hat{\mathbf{x}}^{AL}(t|\tau \leq s)$ es de la forma (2.3) con $\mathbf{K}(t, s)$ definida en (2.2). Además, las filas son de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{[2i-1]}(t, s) &= [k_1(t-i+1, s), k_2(t-i+1, s), \dots, \\ &\quad k_{2n-1}(t-i+1, s), k_{2n}(t-i+1, s)] \\ \mathbf{K}_{[2i]}(t, s) &= [k_2^*(t-i+1, s), k_1^*(t-i+1, s), \dots, \\ &\quad k_{2n}^*(t-i+1, s), k_{2n-1}^*(t-i+1, s)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

para $i = 1, \dots, n$.

La implicación inversa, 2) \Rightarrow 1), se comprueba de manera similar.

Por último, la prueba de 2) \Leftrightarrow 3) es similar a la dada en el Teorema 1 de Kasprzyk y Szczotka (2006). \square

Análogamente, se sugiere una caracterización basada en el vector ampliado hacia atrás. Este resultado muestra también la independencia de la dirección del tiempo en la condición de Markov.

Teorema 2.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. x_t es una señal MAL(n).
2. $\hat{\mathbf{x}}^{AL}(t|\tau \geq s) = \hat{\mathbf{x}}^{AL}(t|s, s+1, \dots, s+n-1)$ para cualquier $s > t$.
3. Para $s > t$, el estimador AL de \mathbf{x}_t^b sobre la base del conjunto $\{\mathbf{x}_\tau^b, \mathbf{x}_\tau^{b*}, \tau \geq s\}$ es de la forma

$$\hat{\mathbf{x}}^{bAL}(t|\tau \geq s) = \mathbf{K}(t+n-1, s+n-1)\mathbf{x}_s^b \quad (2.7)$$

Demostración. La equivalencia 2) \Leftrightarrow 3) es similar a la del Teorema 2.1, teniendo en cuenta que $E[\mathbf{x}_t^b \mathbf{x}_s^{bH}] = \mathbf{R}_x(t+n-1, s+n-1)$.

Ahora, probamos 1) \Leftrightarrow 3). Siguiendo un razonamiento similar al utilizado en la demostración del Teorema 1 de Kasprzyk y Szczotka (2006), se tiene que (2.7) es equivalente a la condición

$$\mathbf{K}(t, s) = \mathbf{K}(t, \tau)\mathbf{K}(\tau, s), \quad t \leq \tau \leq s$$

y, por tanto,

$$\mathbf{K}^H(s, t) = \mathbf{K}^H(\tau, t)\mathbf{K}^H(s, \tau) = (\mathbf{K}(s, \tau)\mathbf{K}(\tau, t))^H, \quad t \geq \tau \geq s$$

de donde, aplicando el Teorema 2.1, se sigue que x_t es una señal MAL(n).

De forma similar, se comprueba la implicación 1) \Rightarrow 3). \square

2.3. Estructura de Correlación de Señales MAL(n)

En esta sección analizamos las propiedades de segundo orden de una señal MAL(n). Específicamente, estudiamos la estructura de las matrices $\mathbf{R}_x(t, s)$, $\mathbf{K}(t, s)$, \mathbf{R}_t y $\mathbf{K}_t := \mathbf{K}(t + 1, t)$.

Proposición 2.1.

1. Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{K}_{[2(j+i)-1]}(t + j, t) = \underbrace{[0, \dots, 0]_{2i-2}}_{2i-2}, 1, \underbrace{[0, \dots, 0]_{2(n-i)+1}}_{2(n-i)+1}, \quad j < n, \quad i = 1, \dots, n - j \quad (2.8)$$

$$\mathbf{K}_{[2(j+i)]}(t + j, t) = \underbrace{[0, \dots, 0]_{2i-1}}_{2i-1}, 1, \underbrace{[0, \dots, 0]_{2(n-i)}}_{2(n-i)}, \quad j < n, \quad i = 1, \dots, n - j \quad (2.9)$$

$$\mathbf{K}_{[2+i]}(t + j + 1, t) = \mathbf{K}_{[i]}(t + j, t), \quad j \geq 0, \quad i = 1, \dots, 2n - 2 \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K}_{[1]}(t + j + 1, t) = \mathbf{K}_{[1]}(t + j + 1, t + j) \mathbf{K}(t + j, t), \quad j \geq 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K}_{[2]}(t + j + 1, t) = \mathbf{K}_{[2]}(t + j + 1, t + j) \mathbf{K}(t + j, t), \quad j \geq 0 \quad (2.12)$$

2. La matriz \mathbf{K}_t es de la forma

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} k_{1,t} & k_{2,t} & k_{3,t} & k_{4,t} & \cdots & k_{2n-3,t} & k_{2n-2,t} & k_{2n-1,t} & k_{2n,t} \\ k_{2,t}^* & k_{1,t}^* & k_{4,t}^* & k_{3,t}^* & \cdots & k_{2n-2,t}^* & k_{2n-3,t}^* & k_{2n,t}^* & k_{2n-1,t}^* \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

donde $k_{i,t} = k_i(t + 1, t)$ para $i = 1, \dots, 2n$ y $k_i(t + 1, t)$ está definida en (2.5).

3. La matriz $\mathbf{R}_x(t, s)$ satisface la ecuación recursiva

$$\mathbf{R}_x(t + 1, s) = \mathbf{K}_t \mathbf{R}_x(t, s), \quad s \leq t \quad (2.14)$$

cuya solución es

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t, s) = \mathbf{K}_{t-1} \cdots \mathbf{K}_s \mathbf{R}_s, \quad s < t \quad (2.15)$$

Por otra parte,

$$\mathbf{R}_{t+1} = \mathbf{K}_t \mathbf{R}_t \mathbf{K}_t^H + \mathbf{Q}_t$$

donde \mathbf{Q}_t es una matriz $2n \times 2n$ de la forma

$$\mathbf{Q}_t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_t & \mathbf{0}_{2 \times 2n-2} \\ \hline \mathbf{0}_{2n-2 \times 2} & \mathbf{0}_{2n-2 \times 2n-2} \end{array} \right] \quad (2.16)$$

con

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} a_{1,t} & a_{2,t} \\ a_{2,t}^* & a_{1,t} \end{bmatrix}$$

donde $a_{1,t}$ son números reales positivos y \mathbf{A}_t es definida no negativa.

Demostración. Teniendo en cuenta que $\hat{\mathbf{x}}^{AL}(t+j-i|\tau \leq t) = \mathbf{x}_{t+j-i}$, para $j \leq i \leq n-1$, obtenemos (2.8) y (2.9).

Del mismo modo, (2.13) se sigue de (2.6), (2.8) y (2.9).

Ahora, de (2.4) obtenemos

$$\mathbf{K}(t+j+1, t) = \mathbf{K}(t+j+1, t+j) \mathbf{K}(t+j, t), \quad j \geq 0$$

y junto con (2.13) se demuestra (2.10), (2.11) y (2.12).

Por otro lado, (2.14) y (2.15) se pueden demostrar siguiendo un razonamiento similar a la del Teorema 2 en Kasprzyk y Szczotka (2006).

Finalmente, usando el teorema de proyección de Hilbert y (2.3) tenemos

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{K}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad (2.17)$$

donde $\mathbf{w}_t = [w_t, w_t^*, 0, \dots, 0]'$ es el proceso de innovaciones que, por construcción, no está correlado con \mathbf{x}_s para $t \geq s$. Por lo tanto,

$$\mathbf{R}_{t+1} = E[\mathbf{x}_{t+1} \mathbf{x}_{t+1}^H] = E[(\mathbf{K}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t)(\mathbf{K}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t)^H] = \mathbf{K}_t \mathbf{R}_t \mathbf{K}_t^H + \mathbf{Q}_t$$

con $E[\mathbf{w}_t \mathbf{w}_t^H] = \mathbf{Q}_t$ dado en (2.16). \square

2.4. Modelización de Señales MAL(n)

Nuestro objetivo es proporcionar diferentes formas de modelizar señales MAL(n). También se establece la conexión entre señales estacionarias MAL(n) y la representación autoregresiva definida en Picinbono y Bondon (1997).

Teorema 2.3. *Una señal $\{x_t, 0 \leq t \leq m\}$, es una señal MAL(n) si, y sólo si, tiene las siguientes representaciones hacia delante y hacia atrás:*

$$x_{t+1} = \mathbf{k}'_t \mathbf{x}_t + w_t, \quad t \geq n - 1 \quad (2.18)$$

$$x_t = \mathbf{k}'_{t+1} \mathbf{x}_{t+1}^b + w_{t+1}^b, \quad t \leq m - n + 1 \quad (2.19)$$

donde $\mathbf{k}_t, \mathbf{k}_t^b$ son vectores $2n$ -dimensionales, y w_t, w_t^b son ruidos doblemente blancos de manera que

$$E[w_t \mathbf{x}_{n-1}] = \mathbf{0}_{2n}, \quad t \geq n - 1 \quad (2.20)$$

$$E[w_t^b \mathbf{x}_{m-n+1}^b] = \mathbf{0}_{2n}, \quad t \leq m - n + 1$$

Demostración. Si x_t es una señal MAL(n) entonces, a partir de (2.13) y (2.17), tenemos

$$x_{t+1} = k_{1,t} x_t + k_{2,t} x_t^* + \cdots + k_{2n-1,t} x_{t-n+1} + k_{2n,t} x_{t-n+1}^* + w_t \quad (2.21)$$

donde w_t es la primera componente de \mathbf{w}_t . Por lo tanto, denotando $\mathbf{k}_t = \mathbf{K}'_{[1]}(t+1, t) = [k_{1,t}, \dots, k_{2n,t}]'$ obtenemos (2.18).

Por otra parte, utilizando el teorema de proyección de Hilbert y (2.10), se obtiene

$$\mathbf{x}_t^b = \mathbf{K}(t+n-1, t+n) \mathbf{x}_{t+1}^b + \mathbf{w}_{t+1}^b \quad (2.22)$$

donde $\mathbf{w}_t^b = [0, \dots, 0, w_t^b, w_t^{b*}]'$ es el proceso de innovaciones hacia atrás que, por su construcción, está incorrelado con \mathbf{x}_s para $t \leq s$. Por lo tanto, $\mathbf{x}_t = \mathbf{K}_{[2n-1]}(t+n-1, t+n) \mathbf{x}_{t+1}^b + w_{t+1}^b$, con w_{t+1}^b la componente $2n-1$ de \mathbf{w}_{t+1}^b .

Así, denotando $\mathbf{k}'_{t+1} = \mathbf{K}_{[2n-1]}(t+n-1, t+n)$, se obtiene (2.19).

Recíprocamente, supongamos que x_t tiene la representación (2.18). Sea \mathcal{H} el espacio lineal generado por el conjunto $\{x_\tau, x_\tau^*, \tau \leq t\}$. Mediante el uso de la Proposición 2.3.2 de Brockwell y Davis (1991), se puede demostrar que $\hat{x}^{AL}(t|\tau \leq s) = \hat{x}^{AL}(t|s, s-1, \dots, s-n+1)$ para todo $s < t$ es

equivalente a $\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t) = \hat{x}^{AL}(t+1|t, t-1, \dots, t-n+1)$ para todo t .

Por lo tanto, proyectando (2.18) sobre \mathcal{H} y teniendo en cuenta la Proposición 2.3.2 de Brockwell y Davis (1991) tenemos

$$\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t) = \mathbf{k}'_t \mathbf{x}_t + \hat{w}^{AL}(t|\tau \leq t)$$

donde $\hat{w}^{AL}(t|\tau \leq t)$ es la proyección de w_t en \mathcal{H} .

La hipótesis (2.20) garantiza que w_t está incorrelado con x_s y x_s^* para $t \geq s$. Así, $\hat{w}^{AL}(t|\tau \leq t) = 0$ y x_t es una señal MAL(n).

La demostración para la representación hacia atrás (2.19) es similar. \square

Corolario 2.1. *Si x_t es una señal ESO y MAL(n), entonces x_t es la solución del sistema AL definido en Picinbono y Bondon (1997)*

$$x_{t+1} = \sum_{j=0}^{n-1} g_{1j} x_{t-j} + \sum_{j=0}^{n-1} g_{2j} x_{t-j}^* + w_t \quad (2.23)$$

donde $g_{1j}, g_{2j} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n-1$, y w_t es un ruido doblemente blanco tal que $E[w_t w_t^*] = a_1$ y $E[w_t w_t] = a_2$.

Demostración. Al ser x_t una señal ESO entonces las matrices $\mathbf{R}_x(t+h, t)$, $h = 1, 2, \dots$, son independientes de t . Por lo tanto, de (2.2) se obtiene $k_{i,t} = k_i$ para todo i y t . Por último, teniendo en cuenta (2.21) obtenemos que

$$x_{t+1} = \sum_{j=0}^{n-1} k_{2j+1} x_{t-j} + \sum_{j=0}^{n-1} k_{2j+2} x_{t-j}^* + w_t$$

lo que proporciona (2.23) definiendo $g_{1j} = k_{2j+1}$ y $g_{2j} = k_{2j+2}$. \square

A continuación, resumimos los resultados anteriores en un algoritmo que proporciona modelos para una señal MAL(n) hacia delante y hacia atrás.

Algoritmo 2.1.

Paso 1: Definir el vector $2n$ -dimensional \mathbf{k}_t de modo que \mathbf{k}'_t coincida con la primera fila de la matriz

$$\mathbf{K}_t := \mathbf{R}_x(t+1, t) \mathbf{R}_t^{-1} \quad (2.24)$$

Del mismo modo, definimos el vector $2n$ -dimensional \mathbf{k}_{t+1}^b tal que $\mathbf{k}_{t+1}^{b'}$ es igual a la fila $2n - 1$ de la matriz

$$\mathbf{K}_{t+1}^b := \mathbf{K}(t + n - 1, t + n) = \mathbf{R}_x(t + n - 1, t + n) \mathbf{R}_{t+n}^{-1} \quad (2.25)$$

Paso 2: Considerar las matrices

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{R}_{t+1} - \mathbf{K}_t \mathbf{R}_t \mathbf{K}_t^H \quad (2.26)$$

$$\mathbf{Q}_{t+1}^b = \mathbf{R}_{t+n-1} - \mathbf{K}_{t+1}^b \mathbf{R}_{t+n} \mathbf{K}_{t+1}^{bH} \quad (2.27)$$

Paso 3: La señal x_t puede ser representada por los siguientes modelos hacia adelante y hacia atrás:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \mathbf{k}_t' \mathbf{x}_t + w_t, & t \geq n - 1 \\ x_t &= \mathbf{k}_{t+1}^{b'} \mathbf{x}_{t+1}^b + w_{t+1}^b, & t \leq m - n + 1 \end{aligned}$$

donde w_t es un ruido doblemente blanco incorrelado con x_{n-1} para todo $t \geq n - 1$ y w_t^b es un ruido doblemente blanco incorrelado con x_{m-n+1} para todo $t \leq m - n + 1$. Por otra parte, $E[w_t w_t^*]$ y $E[w_t w_t]$ son los elementos $(1, 1)$ y $(1, 2)$, respectivamente, de la matriz \mathbf{Q}_t . Del mismo modo, $E[w_t^b w_t^{b*}]$ y $E[w_t^b w_t^b]$ son los elementos $(2n - 1, 2n - 1)$ y $(2n - 1, 2n)$, respectivamente, de la matriz \mathbf{Q}_t^b .

En determinadas situaciones, tenemos un modelo hacia adelante de la forma (2.18) para la señal x_t . Sería interesante poder obtener un modelo hacia atrás directamente del modelo hacia adelante. A continuación, se muestra una forma útil para conseguir nuestro objetivo.

Proposición 2.2. Dado un modelo hacia adelante de la forma

$$x_{t+1} = \mathbf{k}_t' \mathbf{x}_t + w_t, \quad n - 1 \leq t \leq m \quad (2.28)$$

con w_t un ruido doblemente blanco incorrelado con \mathbf{x}_{n-1} , entonces x_t tiene la representación hacia atrás

$$x_t = \mathbf{k}_{t+1}^{b'} \mathbf{x}_{t+1}^b + w_{t+1}^b, \quad 0 \leq t \leq m - n + 1$$

donde el vector $2n$ -dimensional \mathbf{k}_{t+1}^b satisface que $\mathbf{k}_{t+1}^{b'}$ es igual a la fila $2n - 1$ de la matriz $\mathbf{K}_{t+1}^b = \mathbf{R}_{t+n-1} \mathbf{K}_{t+n-1}^H \mathbf{R}_{t+n}^{-1}$ y w_t^b es un ruido doblemente blanco con las propiedades dadas en el Paso 3 del Algoritmo 2.1.

Demostración. De (2.28) y el Teorema 2.3 se deduce que x_t^b tiene la representación (2.22). Entonces, mediante el uso de (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{t+1}^b &= \mathbf{K}(t+n-1, t+n) = \mathbf{R}_x(t+n-1, t+n) \mathbf{R}_{t+n}^{-1} = \\ &= \mathbf{R}_x^H(t+n, t+n-1) \mathbf{R}_{t+n}^{-1} = \mathbf{R}_{t+n-1} \mathbf{K}_{t+n-1}^H \mathbf{R}_{t+n}^{-1} \end{aligned}$$

y por lo tanto se verifica el resultado. \square

Ejemplo 2.1 (continuación). *No es difícil comprobar que x_t es una señal MAL(1) mediante el uso de la propiedad (2.4). Por lo tanto, aplicando el Algoritmo 2.1, se tiene la representación de espacio de estados*

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}(e^3 + e)x_t + \frac{1}{2}(e^3 - e)x_t^* + w_t \quad (2.29)$$

con w_t un ruido doblemente blanco incorrelado con x_0 y x_0^* . Además, como x_t es también una señal ESO, este modelo es trivialmente su representación autorregresiva AL.

Ejemplo 2.2 (continuación). *Según el Teorema 2.1 y el Algoritmo 2.1, se obtiene que x_t es una señal MAL(1) y tiene la representación en espacio de estados*

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \frac{10^{1/3}(t+101)^{1/6}(t+100)^{1/6} - 10}{10^{1/3}(t+100)^{1/3} - 10} x_t + \\ &+ j \frac{10^{2/3}(-(t+101)^{1/6} + (t+100)^{1/6})}{10^{1/3}(t+100)^{1/3} - 10} x_t^* + w_t \end{aligned} \quad (2.30)$$

con w_t un ruido doblemente blanco incorrelado con x_1 y x_1^* .

2.5. Problema de Estimación de Señales MAL(n)

Una vez que el problema de modelización de señales MAL(n) ha sido resuelto, nos centramos en el problema de estimación de tales señales con un enfoque AL. Las representaciones hacia delante y hacia atrás dadas en el Teorema 2.3 simplifican notablemente el diseño de los diferentes algoritmos recursivos de estimación. Con este fin, usamos las recursiones de Kalman en la representación hacia delante para proporcionar la solución a los problemas de predicción y de filtrado y en la representación hacia atrás para el problema de alisado.

Supongamos que observamos una señal MAL(n), $\{x_t, 0 \leq t \leq m\}$ a través del proceso

$$y_t = h_t x_t + v_t, \quad 0 \leq t \leq m$$

con v_t un ruido doblemente blanco tal que $E[v_t v_t^*] = n_{1,t}$ y $E[v_t v_t] = n_{2,t}$ con $n_{1,t} > |n_{2,t}|$. Además, asumimos que v_t no está correlado con x_s y x_s^* para todo t, s .

2.5.1. Casos de Predicción y Filtrado

Denotemos el estimador de filtrado AL de x_t como $\hat{x}^{AL}(t|\tau \leq t)$ y el predictor en una etapa x_{t+1} por $\hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t)$, ambos obtenidos sobre la base de la información proporcionada por el conjunto $\{y_0, y_0^*, \dots, y_t, y_t^*\}$. Mediante la combinación de la representación hacia delante (2.18) y la clásica del filtro de Kalman, tenemos el siguiente algoritmo que proporciona estos estimadores de una manera eficiente.

Algoritmo 2.2.

Paso 1: Considerar el vector $\mathbf{y}_t = [y_t, y_t^*]'$, la matriz $2 \times 2n$

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_t^* & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

la matriz

$$\mathbf{N}_t = \begin{bmatrix} n_{1,t} & n_{2,t} \\ n_{2,t}^* & n_{1,t} \end{bmatrix},$$

y las matrices $2n \times 2n$, \mathbf{K}_t y \mathbf{Q}_t dadas en (2.24) y (2.26), respectivamente.

Paso 2: Calcular las recursiones para $t \geq n-1$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t) &= \mathbf{K}_t \hat{\mathbf{x}}(t|\tau \leq t) \\ \mathbf{P}_{t+1|t} &= \mathbf{K}_t \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{K}_t^H + \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{F}_{t+1} &= \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1}^H [\mathbf{H}_{t+1} \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{H}_{t+1}^H + \mathbf{N}_{t+1}]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t+1) &= \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t) + \mathbf{F}_{t+1} [\mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{H}_{t+1} \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t)] \\ \mathbf{P}_{t+1|t+1} &= \mathbf{P}_{t+1|t} - \mathbf{F}_{t+1} \mathbf{H}_{t+1} \mathbf{P}_{t+1|t} \end{aligned}$$

donde la condición inicial $\hat{\mathbf{x}}(n-1|\tau \leq n-1)$ de la estimación de x_{n-1} se obtiene a partir de la información proporcionada por el vector $2n$ -dimensional $[y_{n-1}, y_{n-1}^*, \dots, y_0, y_0^*]'$ y $\mathbf{P}_{n-1|n-1}$ es su error asociado.

Paso 3: Seguidamente, denotando $\mathbf{g} = [1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-1}]'$ tenemos que para

$t \geq n-1$,

$$\begin{aligned} \hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t) &= \mathbf{g}' \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t) \\ \hat{x}^{AL}(t+1|\tau \leq t+1) &= \mathbf{g}' \hat{\mathbf{x}}(t+1|\tau \leq t+1) \end{aligned}$$

Por tanto, los errores de ambos estimadores son

$$\begin{aligned} p_{t+1|t}^{Al} &= \mathbf{g}' \mathbf{P}_{t+1|t} \mathbf{g} \\ p_{t+1|t+1}^{Al} &= \mathbf{g}' \mathbf{P}_{t+1|t+1} \mathbf{g} \end{aligned}$$

2.5.2. Caso de Alisado

A continuación, calculamos dos estimadores de alisado AL de x_t sobre la base de datos futuros. El primer alisador se obtiene a partir del conjunto de observaciones $\{y_t, y_t^*, y_{t+1}, y_{t+1}^*, \dots, y_m, y_m^*\}$ y se denotará por $\hat{x}^{bAL}(t|\tau \leq t)$. El segundo se deriva de la información facilitada por el conjunto $\{y_{t+1}, y_{t+1}^*, \dots, y_m, y_m^*\}$, y nos referiremos a él como $\hat{x}^{bAL}(t|\tau \leq t+1)$. Mediante la aplicación del filtro de Kalman hacia atrás en el modelo (2.21) obtenemos el siguiente algoritmo.

Algoritmo 2.3.

Paso 1: Considerar el vector \mathbf{y}_t y las matrices \mathbf{H}_t , \mathbf{N}_t definidas en el Paso 1 del Algoritmo 2.2 y las matrices $2n \times 2n$, \mathbf{K}_{t+1}^b y \mathbf{Q}_{t+1}^b dadas en (2.25) y (2.27), respectivamente.

Paso 2: Calcular las recurrencias para $t \leq m - n$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^b(t|\tau \leq t+1) &= \mathbf{K}_{t+1}^b \hat{\mathbf{x}}^b(t+1|\tau \leq t+1) \\ \mathbf{P}_{t|t+1}^b &= \mathbf{K}_{t+1}^b \mathbf{P}_{t+1|t+1}^b \mathbf{K}_{t+1}^{bH} + \mathbf{Q}_{t+1}^b \\ \mathbf{F}_t^b &= \mathbf{P}_{t|t+1}^b \mathbf{H}_t^H [\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t+1}^b \mathbf{H}_t^H + \mathbf{N}_t]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}^b(t|\tau \leq t) &= \hat{\mathbf{x}}^b(t|\tau \leq t+1) + \mathbf{F}_t^b [\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}^b(t|\tau \leq t+1)] \\ \mathbf{P}_{t|t}^b &= \mathbf{P}_{t|t+1}^b - \mathbf{F}_t^b \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t+1}^b \end{aligned}$$

donde las condiciones iniciales $\hat{\mathbf{x}}^b(m-n+1|\tau \leq m-n+1)$ de la estimación de \mathbf{x}_{m-n+1}^b se obtiene del vector $2n+2$ -dimensional $[y_{m-n+1}, y_{m-n+1}^*, \dots, y_m, y_m^*]'$ y $\mathbf{P}_{m-n+1|m-n+1}^b$ es su error asociado.

Paso 3: Denotando $\mathbf{l} = \underbrace{[0, \dots, 0]}_{2n-2}, 1, 0]'$, tenemos que para $t \leq m - n$,

$$\begin{aligned} \hat{x}^{bAL}(t|\tau \leq t+1) &= \mathbf{l}' \hat{\mathbf{x}}^b(t|\tau \leq t+1) \\ \hat{x}^{bAL}(t|\tau \leq t) &= \mathbf{l}' \hat{\mathbf{x}}^b(t|\tau \leq t) \end{aligned}$$

Por otra parte, los errores de ambos estimadores son

$$\begin{aligned} p_{t|t+1}^{bAL} &= \mathbf{l}' \mathbf{P}_{t|t+1}^b \mathbf{l} \\ p_{t|t}^{bAL} &= \mathbf{l}' \mathbf{P}_{t|t}^b \mathbf{l} \end{aligned}$$

2.6. Ejemplo Numérico

Esta sección está dedicada a mostrar las ventajas de la representación (2.30) en relación con la (2.1) en dos campos de procesamiento de la señal: simulación y estimación.

En primer lugar, utilizamos estos modelos para simular trayectorias de x_t definidas en el Ejemplo 2.2. Específicamente, se han generado 50.000 trayectorias de ambos modelos a través de simulaciones de Montecarlo. Para evaluar el rendimiento de las simulaciones se comparan las funciones de correlación y complementaria verdaderas y simuladas.

Las Figuras 2.1 y 2.2 representan las funciones de correlación y complementaria verdaderas de x_t , las Figuras 2.3 y 2.4 muestran las simuladas correspondientes a (2.1) y las Figuras 2.5 y 2.6 las simuladas para (2.30).

Podemos ver que las trayectorias simuladas de (2.1) recogen adecuadamente el comportamiento de la función de correlación. Sin embargo, este modelo es incapaz de mostrar las características básicas de la función complementaria. Esta deficiencia no se presenta con (2.30) cuyas trayectorias simuladas producen representaciones precisas de los momentos de segundo orden de x_t .

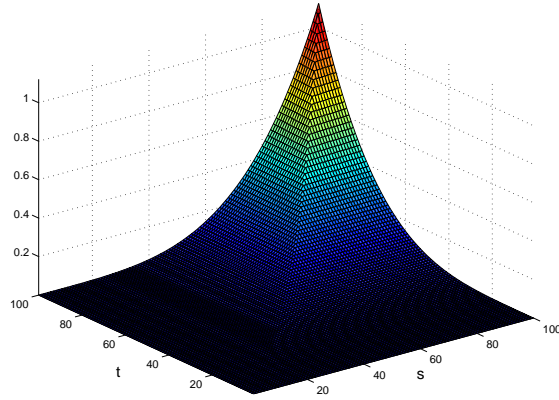
Finalmente, se compara el alisador EL obtenido de (2.1) con el alisador AL derivado en el Algoritmo 2.3 para (2.30). Para el caso particular en el que $h_t = 1$ y $n_{1,t} = 1$, la Figura 2.7 compara el error $p_{t|t}^{bAL}$ obtenido para $n_{2,t} = 0,25$ (línea de puntos) y $n_{2,t} = 0,8$ (línea continua) con el error EL (línea discontinua).

Por otra parte, considerando $n_{2,t} = n_2$ y denotando los errores de los alisadores impropios y propios para cada valor de n_2 por $p_{t|t}^{bAL}(n_2)$ y $p_{t|t}^b(n_2)$, respectivamente, la Figura 2.8 muestra la media de la diferencia entre los errores de estimación EL y AL

$$DE(n_2) = \frac{1}{100} \sum_{t=1}^{100} (p_{t|t}^b(n_2) - p_{t|t}^{bAL}(n_2))$$

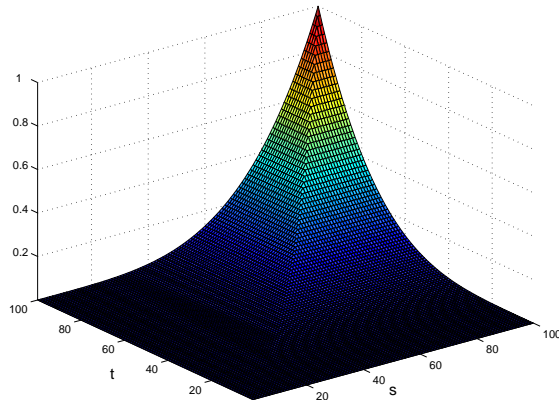
con n_2 variando dentro del intervalo $[0, 1)$.

Como se esperaba, ambas figuras muestran que la estimación AL supera a la estimación EL, es decir, ilustran el mejor comportamiento del alisador impropio en relación con el propio. De la Figura 2.8, también se llega a la conclusión de que esta ganancia en el rendimiento decrece a medida que n_2 disminuye.



(a)

Figura 2.1: Función de correlación verdadera



(b)

Figura 2.2: Función complementaria verdadera

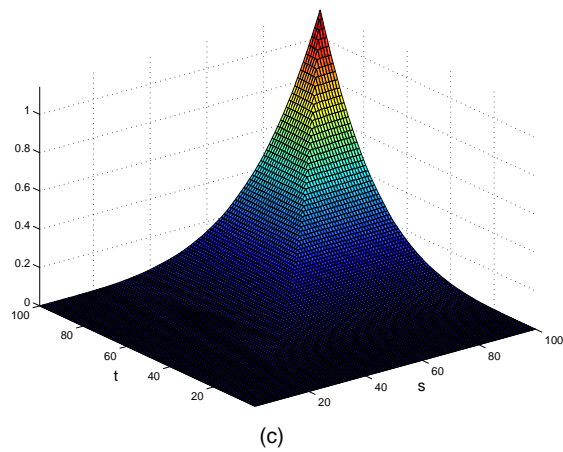


Figura 2.3: Función de correlación simulada para (2.1)

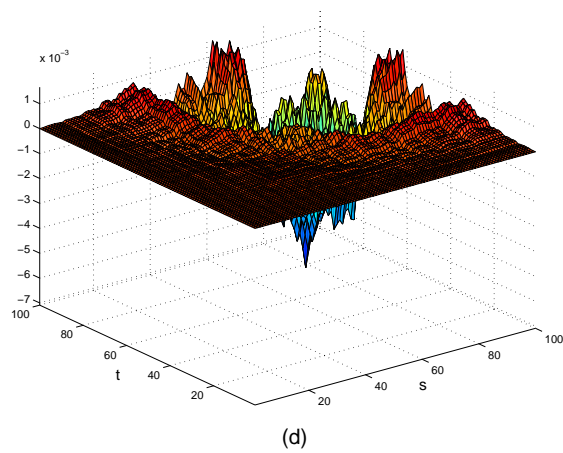


Figura 2.4: Función complementaria simulada para (2.1)

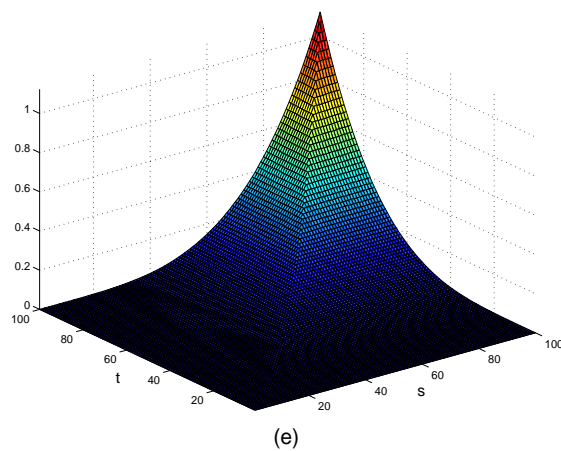


Figura 2.5: Función de correlación simulada para (2.30)

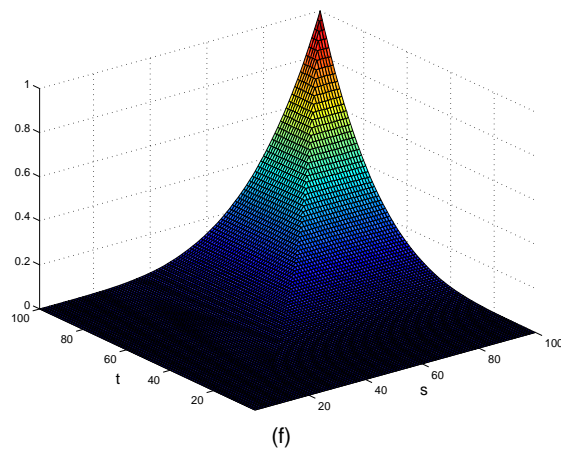


Figura 2.6: Función complementaria simulada para (2.30)

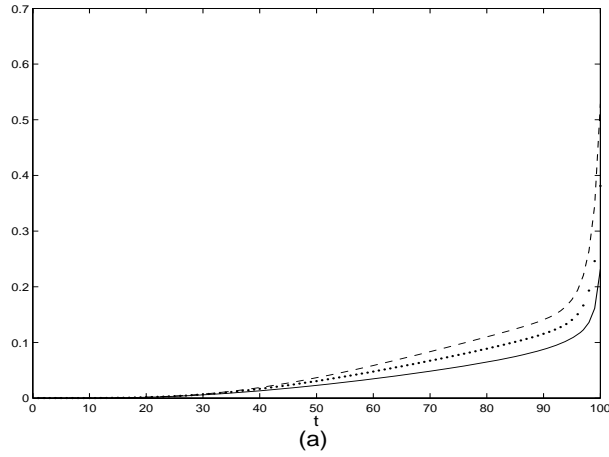


Figura 2.7: Errores de Alisado AL $p_{t|t}^{bAL}$ para $n_{2,t} = 0,25$ (línea de puntos) y $n_{2,t} = 0,8$ (línea continua), y el error de alisado $p_{t|t}^b$ (línea discontinua)

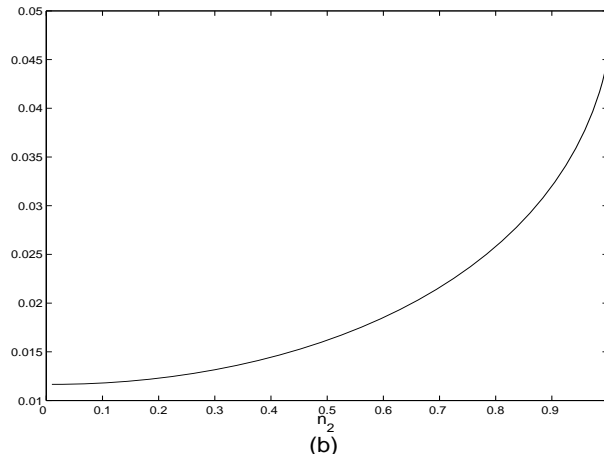


Figura 2.8: Media de la diferencia entre los errores de estimación EL y AL $DE(n_2)$

Capítulo 3

Algoritmos de Alisado AL para Señales Ampliamente Factorizables

3.1. Introducción

El concepto de señales ampliamente factorizables surge como una extensión de las señales aleatorias reales factorizables (Sugisaka, 1983) para el caso de señales impropias y hace alusión a aquellas señales cuya función de correlación aumentada tiene forma de núcleo factorizable, englobando tanto a señales estacionarias como no estacionarias.

Para este tipo de señales, Fernández-Alcalá et al. (2012) abordaron el problema de predicción lineal y no lineal, proponiendo algoritmos recursivos de estimación AL (Sección 1.8). La principal ventaja de la metodología propuesta es que se puede aplicar a partir del conocimiento sólo de la propiedad de segundo orden de los vectores aumentados involucrados, sin que se necesite el conocimiento del modelo de espacio de estados.

Un problema de estimación diferente a la predicción y el filtrado es el problema de alisado. En general, los problemas de alisado son de interés en muchos contextos científicos y con diferentes objetivos en mente. De hecho, aparecen generalmente en estudios de re-análisis o retrospectivos. Por ejemplo, se aplican para determinar el valor inicial de un sistema dinámico o reconstrucción de procesos desconocidos (Snyder, 1972).

En este capítulo se considera el problema de alisado para la clase de señales impropias ampliamente factorizables. En concreto, basándose en la información de correlación y bajo un tratamiento AL, se proporcionan

algoritmos de alisado de punto fijo, lineales y no lineales, para este tipo de señales. En primer lugar, consideramos que la señal se observa a través de una ecuación lineal la cual incluye una correlación entre la señal y el ruido de la observación. Para este problema, se proporciona un procedimiento recursivo para el estimador AL de alisado de punto fijo de la señal, así como su error. A continuación, se estudia el problema de alisado de punto fijo AL basado en observaciones no lineales siguiendo la misma metodología que la expuesta en el EKF. En este caso, la ecuación de observaciones consta de una función no lineal de la señal y un ruido aditivo incorrelado con la señal. Finalmente, en la Sección 3, se desarrollan dos ejemplos numéricos, donde se ilustra el buen comportamiento de los algoritmos propuestos, frente a los derivados de un procesamiento EL.

3.2. Algoritmo de Alisado de Punto Fijo AL

Sea $\{x_t, t \in T\}$ una señal impropia ampliamente factorizable en el sentido dado en la Definición 1.11.

En estas condiciones, se aborda el problema de encontrar el estimador de alisado AL de la señal x_t , en el instante de tiempo fijo t_k , sobre la base de un conjunto de observaciones aumentadas $\{\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_n}\}$, para $t_k \geq t_n$.

En primer lugar, proporcionamos un algoritmo de alisado óptimo de punto fijo AL asumiendo que las observaciones son lineales. Este algoritmo jugará un papel importante en el desarrollo de un algoritmo subóptimo AL de alisado de punto fijo cuando se elimina la hipótesis de linealidad impuesta sobre las observaciones.

3.2.1. Caso Lineal

Supongamos que las observaciones de la señal x_{t_i} se obtienen de la ecuación lineal (1.7). En esta situación, y en base a las observaciones aumentadas $\{\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_n}\}$, nuestro objetivo es encontrar el alisador de punto fijo AL de la señal, x_{t_k} , en el instante fijo de tiempo $t_k < t_n$. Siguiendo la metodología de (Picinbono y Chevalier, 1995) este estimador puede expresarse de la forma

$$\hat{x}^{AL}(t_k | \tau \leq t_n) = \sum_{j=1}^n \mathbf{h}'(t_k, t_j, t_n) \mathbf{y}_{t_j}, \quad t_n > t_k \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{h}(t_k, t_j, t_n)$ debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r}_{xy}(t_k, t_j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{h}'(t_k, t_i, t_n) \mathbf{R}(t_i, t_j) + \mathbf{h}'(t_k, t_j, t_n) \mathbf{\Sigma}, \quad t_1 \leq t_j \leq t_n, t_n > t_k \quad (3.2)$$

siendo

$$\mathbf{r}_{xy}(t_k, t_j) = E \left[x_{t_k} \mathbf{y}_{t_j}^H \right]$$

y

$$\mathbf{R}(t_i, t_j) = \mathbf{G}(t_i) \mathbf{R}_x(t_i, t_j) \mathbf{G}^H(t_j) + \mathbf{G}(t_i) \mathbf{R}_{xv}(t_i, t_j) + \mathbf{R}_{xv}^H(t_j, t_i) \mathbf{G}^H(t_j)$$

con $\mathbf{\Sigma}$ y $\mathbf{G}^H(t_i)$ definidas en (1.9).

Por lo tanto, el problema de alisado de punto fijo AL está completamente determinado por la resolución de (3.2), que sólo implica el conocimiento de las matrices de correlación de las señales aumentadas implicadas. Sin embargo, la cuestión del cálculo eficiente de dicho estimador debe resolverse satisfactoriamente. Así pues, en este capítulo, siguiendo la metodología de Fernández-Alcalá et al. (2012), la información de correlación es explotada con el objetivo de formular un algoritmo recursivo para el cálculo eficiente del alisador AL de punto fijo de la señal (3.1), así como su error $p_{t_k|t_n}^{AL} = E[|x_{t_k} - \hat{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n)|^2], t_n > t_k$.

Para este propósito, en primer lugar tendremos en cuenta que, a partir de (1.5) y (1.8), las funciones $\mathbf{r}_{xy}(t_k, t_j)$ y $\mathbf{R}(t_i, t_j)$ se pueden expresar como núcleos factorizables de la forma

$$\mathbf{r}_{sy}(t_k, t_j) = \begin{cases} \mathbf{\Psi}_{[1]}(t_k) \mathbf{\Gamma}^H(t_j), & t_k \geq t_j \\ \mathbf{\Pi}_{[1]}(t_k) \mathbf{\Phi}^H(t_j), & t_k \leq t_j \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{R}(t_i, t_j) = \begin{cases} \mathbf{\Phi}(t_i) \mathbf{\Gamma}^H(t_j), & t_i \geq t_j \\ \mathbf{\Gamma}(t_i) \mathbf{\Phi}^H(t_j), & t_i \leq t_j \end{cases} \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{\Psi}(t_i)$, $\mathbf{\Pi}(t_i)$, $\mathbf{\Phi}(t_i)$ y $\mathbf{\Gamma}(t_i)$ están definidas en (1.9).

Entonces, sustituyendo las expresiones (3.3) y (3.4) en la ecuación (3.2) y utilizando el método desarrollado en Sugisaka (1983), se obtiene el siguiente algoritmo de alisado de punto fijo AL.

Teorema 3.1.

El estimador de alisado AL de punto fijo de una señal $\hat{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n)$ definido en (3.1) puede calcularse de forma recursiva a partir de la expresión

$$\hat{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n) = \hat{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n - 1) + \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \left[\mathbf{y}_{t_n} - \mathbf{\Phi}(t_n) \boldsymbol{\epsilon}(t_{n-1}) \right] \quad (3.5)$$

para $t_k < t_n$, con $\epsilon(t_n)$ definida en (1.10) y con la condición inicial $t_n = t_k$, el estimador de filtrado AL $\hat{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n)$ obtenido en el Teorema 1.6.

Así mismo, el vector $\mathbf{h}(t_k, t_n, t_n)$ se obtiene de la ecuación

$$\mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) = [\mathbf{\Pi}_{[1]}(t_k) - \mathbf{f}'(t_k, t_{n-1})] \mathbf{\Phi}^H(t_n) \mathbf{\Omega}^{-1}(t_n) \quad (3.6)$$

con $\mathbf{\Omega}(t_n)$ de la forma (1.11) y $\mathbf{f}(t_k, t_{n-1})$ verificando las ecuaciones de recurrencia siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t_k, t_n) &= \mathbf{f}'(t_k, t_{n-1}) + \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) [\mathbf{\Gamma}(t_n) - \mathbf{\Phi}(t_n) \mathbf{Q}(t_{n-1})] \\ \mathbf{f}'(t_k, t_k) &= \mathbf{\Psi}_{[1]}(t_k) \mathbf{Q}(t_k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{Q}(t_n)$ satisface la ecuación (1.12).

Además, el error asociado puede calcularse de forma recursiva como sigue

$$p_{t_k|t_n}^{AL} = p_{t_k|t_{n-1}}^{AL} - \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \mathbf{\Omega}(t_n) \mathbf{h}^*(t_k, t_n, t_n), \quad t_k < t_n \quad (3.8)$$

donde la condición inicial es el error de filtrado AL, dado por la expresión (1.13).

Demostración. En primer lugar, se obtiene una ecuación recursiva para la función de impulso respuesta $\mathbf{h}(t_k, t_j, t_n)$. Para ello, restando la ecuación (3.2) para t_n y t_{n-1} y tomando (3.4), podemos escribir

$$\begin{aligned} [\mathbf{h}'(t_k, t_j, t_n) - \mathbf{h}'(t_k, t_j, t_{n-1})] \mathbf{\Sigma} &= -\mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \mathbf{\Phi}(t_n) \mathbf{\Gamma}^H(t_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} [\mathbf{h}'(t_k, t_i, t_n) - \mathbf{h}'(t_k, t_i, t_{n-1})] \mathbf{R}(t_i, t_j) \end{aligned}$$

Por otro lado, introduciendo una función $\mathbf{J}(t_j, t_n)$ que cumple la ecuación

$$\mathbf{J}(t_j, t_n) \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Gamma}^H(t_j) - \sum_{i=1}^n \mathbf{J}(t_i, t_n) \mathbf{R}(t_i, t_j) \quad (3.9)$$

obtenemos que

$$\mathbf{h}'(t_k, t_j, t_n) = \mathbf{h}'(t_k, t_j, t_{n-1}) - \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \mathbf{\Phi}(t_n) \mathbf{J}(t_j, t_{n-1}) \quad (3.10)$$

A continuación, se establece la expresión (3.6) para $\mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n)$. En concreto, si ponemos $t_j = t_n$ en (3.2) y usamos (3.3) y (3.4) en la ecuación resultante, obtenemos

$$\mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Pi}_{[1]}(t_k) \mathbf{\Phi}^H(t_n) - \mathbf{f}'(t_k, t_n) \mathbf{\Phi}^H(t_n) \quad (3.11)$$

donde la función $\mathbf{f}(t_k, t_n)$ se define como

$$\mathbf{f}'(t_k, t_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{h}'(t_k, t_i, t_n) \mathbf{\Gamma}(t_i) \quad (3.12)$$

Entonces, restando $\mathbf{f}'(t_k, t_{n-1})$ a $\mathbf{f}'(t_k, t_n)$ y utilizando (3.10), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t_k, t_n) - \mathbf{f}'(t_k, t_{n-1}) &= \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \mathbf{\Gamma}(t_n) \\ &\quad - \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \mathbf{\Phi}(t_n) \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{J}(t_i, t_{n-1}) \mathbf{\Gamma}(t_i) \end{aligned}$$

Como consecuencia, definiendo la matriz

$$\mathbf{Q}(t_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}(t_i, t_n) \mathbf{\Gamma}(t_i) \quad (3.13)$$

se obtiene la expresión recursiva (3.7) para $\mathbf{f}'(t_k, t_n)$. Además, sustituyendo (3.7) en (3.11), se consigue la ecuación (3.6) para $\mathbf{h}(t_k, t_n, t_n)$.

Ahora, con el fin de determinar la condición inicial de (3.7) se sustituye primero $t_n = t_k$ en la ecuación (3.2) y aplicamos (3.3) en la expresión resultante, obteniendo

$$\mathbf{h}'(t_k, t_j, t_k) \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Psi}_{[1]}(t_k) \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{H}}(t_j) - \sum_{i=1}^k \mathbf{h}'(t_k, t_i, t_k) \mathbf{R}(t_i, t_j)$$

Así, a partir de (3.9), es evidente que

$$\mathbf{h}'(t_k, t_j, t_k) = \mathbf{\Psi}_{[1]}(t_k) \mathbf{J}(t_j, t_k) \quad (3.14)$$

Por lo tanto, si sustituimos $t_n = t_k$ en (3.12) y usamos (3.13) y (3.14) en la ecuación resultante, encontramos que la condición inicial en la ecuación (3.7) para $\mathbf{f}'(t_k, t_n)$ con $t_n = t_k$ es

$$\mathbf{f}'(t_k, t_k) = \mathbf{\Psi}_{[1]}(t_k) \mathbf{Q}(t_k) \quad (3.15)$$

Además, a partir de la definición (3.1) para el alisador AL de punto fijo de la señal, $\hat{x}^{AL}(t_k|t_n)$, con $t_k < t_n$, y utilizando (3.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n) - \hat{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n - 1) &= \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \mathbf{y}_{t_n} \\ &\quad - \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \mathbf{\Phi}(t_n) \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{J}(t_i, t_{n-1}) \mathbf{y}_{t_i} \end{aligned}$$

De esta forma, definiendo el vector

$$\boldsymbol{\epsilon}(t_n) = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}(t_i, t_n) \mathbf{y}_{t_i} \quad (3.16)$$

llegamos a la conclusión de que el alisador AL de punto fijo de la señal $\hat{x}^{AL}(t_k|t_n)$ satisface la expresión recursiva (3.5) con la condición inicial $t_n = t_k$, el filtro AL de la señal $\hat{x}^{AL}(t_k|t_k)$.

Por otro lado, a partir del lema de proyección ortogonal, el error asociado al alisador AL de punto fijo $p^{AL}(t_k|t_n)$ se puede expresar de la forma

$$p_{t_k|t_n}^{AL} = r_x(t_k, t_k) - E[\hat{x}(t_k|t_n)x_{t_k}^*] \quad (3.17)$$

Por lo tanto, si restamos la ecuación (3.17) para t_n y t_{n-1} y usamos (3.5) en la ecuación resultante obtenemos

$$p_{t_k|t_n}^{AL} - p_{t_k|t_{n-1}}^{AL} = -\mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \{ \mathbf{r}_{xy}(t_k, t_n) - E[x_{t_k} \boldsymbol{\epsilon}^H(t_{n-1})] \boldsymbol{\Phi}^H(t_n) \}^H \quad (3.18)$$

Así mismo, a partir de (3.2), (3.9), (3.12) y (3.16), se prueba que

$$E[x_{t_k} \boldsymbol{\epsilon}^H(t_n)] = \mathbf{f}'(t_k, t_n) \quad (3.19)$$

Entonces, de (3.3) y (3.19), la ecuación (3.18) se convierte en

$$p_{t_k|t_n}^{AL} - p_{t_k|t_{n-1}}^{AL} = -\mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) \{ [\boldsymbol{\Pi}_{[1]}(t_k) - \mathbf{f}'(t_k, t_{n-1})] \boldsymbol{\Phi}^H(t_n) \}^H$$

y, por tanto, la expresión (3.8) se verifica en virtud de (3.6). □

3.2.2. Caso no Lineal

Supongamos que las observaciones de la señal x_{t_i} están dados por el modelo no lineal (1.14).

Para hacer frente al problema de alisado AL de punto fijo en base a estas observaciones, se procede como en Fernández-Alcalá et al. (2012). En concreto, la clave es linealizar la ecuación de observación anterior en cada instante de tiempo, considerando un desarrollo en serie de Taylor de primer orden sobre el predictor de una etapa de la señal $\tilde{x}^{AL}(t_i|\tau \leq t_{i-1})$ definido en el Algoritmo 1.2. Luego, usando la aproximación

$$z(x_{t_i}, t_i) \approx z(\tilde{x}^{AL}(t_i|\tau \leq t_{i-1}), t_i) + \left. \frac{\partial z(x, t_i)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}^{AL}(t_i|\tau \leq t_{i-1})} (x(t_i) - \tilde{x}^{AL}(t_i|\tau \leq t_{i-1}))$$

y denotando

$$g(t_i) = \left. \frac{\partial z(x, t_i)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}^{AL}(t_i|\tau \leq t_{i-1})} \quad (3.20)$$

y $\bar{y}_{t_i} = y_{t_i} - z(\tilde{x}^{AL}(t_i|\tau \leq t_{i-1}), t_i) + g(t_i)\tilde{x}^{AL}(t_i|\tau \leq t_{i-1})$, obtenemos que

$$\bar{y}_{t_i} \approx g(t_i)x_{t_i} + v_{t_i}, \quad t_1 \leq t_i \leq t_n, t_k < t_n$$

que tiene una información equivalente para y_{t_i} .

Por lo tanto, se puede proceder a la estimación de la señal x_{t_k} , en un instante fijo t_k , en términos de las observaciones aumentadas $\{\bar{\mathbf{y}}_{t_1}, \dots, \bar{\mathbf{y}}_{t_n}\}$, para $t_k \geq t_n$. Con este objetivo, se aplica el Algoritmo 3.1, considerando que la señal y el ruido no están correlados.

Hay que tener en cuenta que, en este caso $\Psi(t_i) = \mathbf{A}(t_i)$, $\Pi(t_i) = \mathbf{B}(t_i)$, $\Phi(t_i) = \mathbf{G}(t_i)\mathbf{A}(t_i)$ y $\Gamma(t_i) = \mathbf{G}(t_i)\mathbf{B}(t_i)$.

A continuación, siguiendo la filosofía EKF, se sustituye $g(t_i)$ por la función de observación linealizada (3.20) y el término $\mathbf{G}(t_n)\mathbf{A}(t_n)\epsilon(t_{n-1})$ se reemplaza por el vector

$$\mathbf{z}(\tilde{x}^{AL}(t_n|\tau \leq t_{n-1}), t_n) = [z(\tilde{x}^{AL}(t_n|\tau \leq t_{n-1}), t_n), z^*(\tilde{x}^{AL}(t_n|\tau \leq t_{n-1}), t_n)]'$$

Las fórmulas del algoritmo AL del alisador de punto fijo no lineal resultante se resumen a continuación.

Algoritmo 3.1. *Dada la ecuación de observación no lineal (1.14), el estimador de alisado AL no lineal de punto fijo de la señal x_{t_k} , en un instante fijo $t_k < t_n$, se puede calcular de forma recursiva a partir de la expresión*

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_n) &= \tilde{x}^{AL}(t_n|\tau \leq t_{n-1}) \\ &+ \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) [\mathbf{y}_{t_n} - \mathbf{z}(\tilde{x}^{AL}(t_n|\tau \leq t_{n-1}), t_n)], t_k < t_n \end{aligned}$$

con la condición inicial $t_n = t_k$, el estimador no lineal de filtrado AL

$$\tilde{x}^{AL}(t_k|\tau \leq t_k) = \mathbf{A}_{[1]}(t_k)\epsilon(t_k)$$

y donde el predictor AL de una etapa es

$$\tilde{x}^{AL}(t_n|\tau \leq t_{n-1}) = \mathbf{A}_{[1]}(t_n)\epsilon(t_{n-1})$$

con $\epsilon(t_n)$ de la forma (1.15).

Por otra parte, $\mathbf{h}(t_k, t_n, t_n)$ se obtiene de la ecuación

$$\mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n) = [\mathbf{B}_{[1]}(t_k) - \mathbf{f}'(t_k, t_{n-1})] \mathbf{A}^H(t_n) \mathbf{G}^H(t_n) \mathbf{\Omega}^{-1}(t_n)$$

con $\mathbf{G}^H(t_n)$, $\mathbf{\Omega}(t_n)$ dadas en (1.16) y $\mathbf{f}(t_k, t_{n-1})$ satisfaciendo la ecuación

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'(t_k, t_n) &= \mathbf{f}'(t_k, t_{n-1}) + \mathbf{h}'(t_k, t_n, t_n)\mathbf{G}(t_n) [\mathbf{B}(t_n) - \mathbf{A}(t_n)\mathbf{Q}(t_{n-1})] \\ \mathbf{f}'(t_k, t_k) &= \mathbf{A}_{[1]}(t_k)\mathbf{Q}(t_k)\end{aligned}$$

con $\mathbf{Q}(t_n)$ definida según (1.17).

3.3. Ejemplos Numéricos

Con el fin de evaluar la implementación de los algoritmos propuestos en los casos lineales y no lineales, se desarrollan, a continuación, dos ejemplos de simulación.

El primero es una generalización del ejemplo de la comunicación tratado en Schreier y Scharf (2010), donde la señal de interés es observada a través de un mecanismo lineal. En el segundo ejemplo, el algoritmo AL no lineal se aplica para estimar una señal real observada a través de observaciones complejas no lineales.

3.3.1. Ejemplo 1: Caso Lineal

Sea $\{s_{t_i}, t_1 \leq t_i \leq t_{100}\}$, con $t_i = i/100$, $i = 1, \dots, 100$, un proceso Gaussiano con media cero y función de correlación

$$r_s(t_i, t_j) = \exp(-|t_i - t_j|), \quad t_1 \leq t_i, t_j \leq t_{100}$$

que se transmite sobre un canal que gira por una fase normal estándar θ y con un ruido doblemente blanco Gaussiano v_t con función de correlación aumentada

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & \tau \\ \tau & 2 \end{bmatrix}$$

y correlada con la señal, siendo la función de correlación cruzada entre la señal aumentada y el ruido aumentado

$$\mathbf{R}_{xv}(t_i, t_j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{25}t_i^2t_j & \frac{1}{25}t_i^2t_j \\ \frac{1}{25}t_i^2t_j & \frac{1}{25}t_i^2t_j \end{bmatrix}$$

Entonces, la señal de interés es $x_{t_i} = e^{j\theta}s_{t_i}$, y las observaciones son de la forma (1.7). Por otra parte, asumimos que θ es independiente de s_{t_i} y v_{t_i} . Obsérvese que, en esta situación, la señal x_{t_i} es ampliamente factorizable, con correlación aumentada de la forma (1.5) con

$$\mathbf{A}(t_i) = \begin{bmatrix} e^{-t_i} & e^{-2}e^{-t_i} \\ e^{-2}e^{-t_i} & e^{-t_i} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(t_i) = \begin{bmatrix} e^{t_i} & 0 \\ 0 & e^{t_i} \end{bmatrix}$$

y la función de correlación cruzada entre \mathbf{x}_{t_i} y \mathbf{v}_{t_i} es de la forma (1.8) con

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(t_i) = \mathbf{E}(t_i) &= [e^{-1/2}t_i^2, e^{-1/2}t_i^2]' \\ \mathbf{D}(t_i) = \mathbf{F}(t_i) &= [t_i/25, t_i/25]' \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, y a modo de ilustración, se analiza el problema de estimar la señal x_{t_k} en el instante fijo de tiempo $t_k = 0.2$, sobre la base del conjunto de observaciones lineales $\{\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_{100}}\}$.

Con este objetivo, se ha aplicado el Teorema 3.1 para calcular el error $p_{0.2|t_n}^{AL}(\tau)$ asociado al estimador de alisado AL de punto fijo. En la Figura 3.1, este error(dB)¹ es comparado con el error de alisado EL de punto fijo $p_{0.2|t_n}(\tau)$, para el valor específico $\tau = 1$. Podemos observar que, como era de esperar, el estimador del alisador AL de punto fijo presenta un mejor comportamiento que el estimador EL.

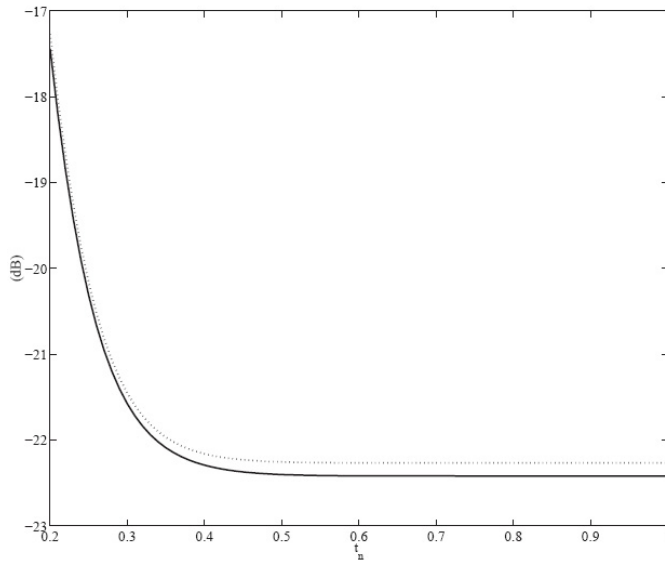


Figura 3.1: Error de alisado de punto fijo AL (línea continua) y EL (línea de puntos) para $\tau = 1$.

¹ $error(dB) = 10 * \log_{10}(error)$

Por otro lado, como medida para comparar el rendimiento del alisador de punto fijo AL frente al EL en función del nivel de impropiiedad del ruido, se considera la siguiente medida propuesta en Navarro-Moreno (2008):

$$\frac{1}{80} \sum_{n=21}^{100} \left(p_{0.2|t_n}^{AL}(\tau) - p_{0.2|t_n}^{EL}(\tau) \right)^2$$

con τ variando en el intervalo $[1, 2)$. Los resultados obtenidos se plasman en la Figura 3.2 que muestra como, en este ejemplo, la diferencia entre ambos errores aumenta con el nivel de impropiiedad del ruido y por lo tanto, la técnica AL es más eficaz.

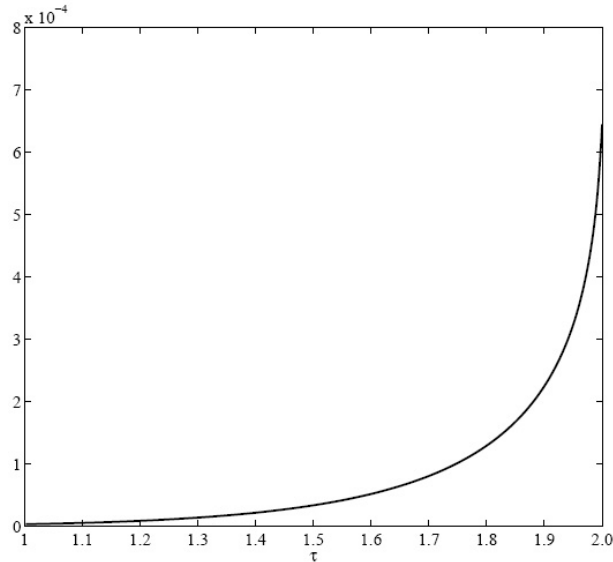


Figura 3.2: Media cuadrática de la diferencia entre los errores de los estimadores de alisado de punto fijo AL y EL.

3.3.2. Ejemplo 2: Caso no Lineal

Sea $\{x_{t_i}, t_1 \leq t_i \leq t_{100}\}$ un proceso complejo de Wiener estándar, es decir,

$$x_{t_i} = x_{1t_i} + jx_{2t_i}, \quad t_i = i/100, \quad i = 1, \dots, 100$$

donde x_{1t_i} y x_{2t_i} son procesos de Wiener reales independientes.

En este caso, consideramos que la señal anterior se observa a través de la ecuación no lineal

$$y_{t_i} = e^{jx_{t_i}} + v_{t_i}, \quad t_i = i/100, \quad i = 1, \dots, 100$$

donde $v_{t_i} = e^{j\theta} v_{1t_i}$, con θ una fase normal estándar y v_{1t_i} un ruido blanco Gaussiano con parámetro de varianza unitaria e incorrelado con la señal x_{t_i} .

Basándose en el conjunto de observaciones $\{\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_{100}}\}$, nuestro objetivo es obtener el estimador AL de alisado de punto fijo de la señal x_{t_i} en el instante fijo de tiempo $t_k = 0,1$.

Notar que la señal de interés es ampliamente factorizable pues su función de correlación aumentada $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(t_i, t_j)$ se puede expresar en la forma (1.5) con

$$\mathbf{A}(t_i) = \mathbf{I}_{2 \times 2} \quad y \quad \mathbf{B}(t_i) = \begin{bmatrix} 2t_i & 0 \\ 0 & 2t_i \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, estamos en condiciones de aplicar el Algoritmo 3.1 para calcular el estimador $\tilde{x}^{AL}(0.1|\tau \leq t_n)$.

La Figura 3.3 compara este estimador con el alisador homólogo de punto fijo no lineal derivado de un procesamiento EL. Además, se han realizado simulaciones de Monte Carlo para estimar los errores correspondientes.

La Figura 3.4 muestra los errores (dB) asociados a las estimaciones de los alisadores de punto fijo EL y AL anteriores, calculados a partir de 5000 trayectorias. Ambas figuras ilustran la precisión alcanzada con la metodología de estimación no lineal propuesta y la mejora de los resultados obtenidos a partir de un procesamiento AL.

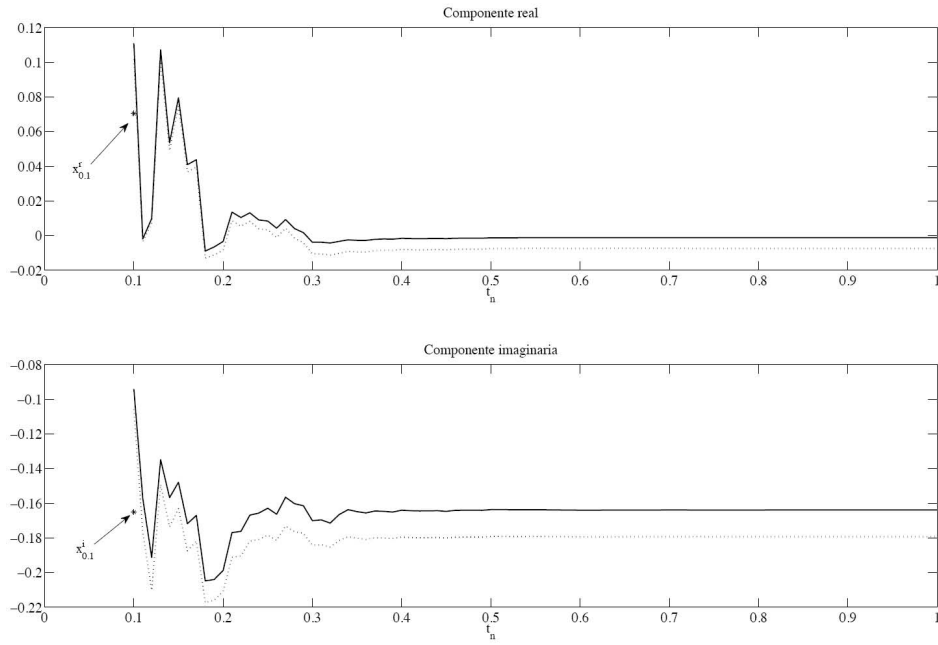


Figura 3.3: Estimador del alisado de punto fijo AL (línea continua) y EL (línea de puntos).

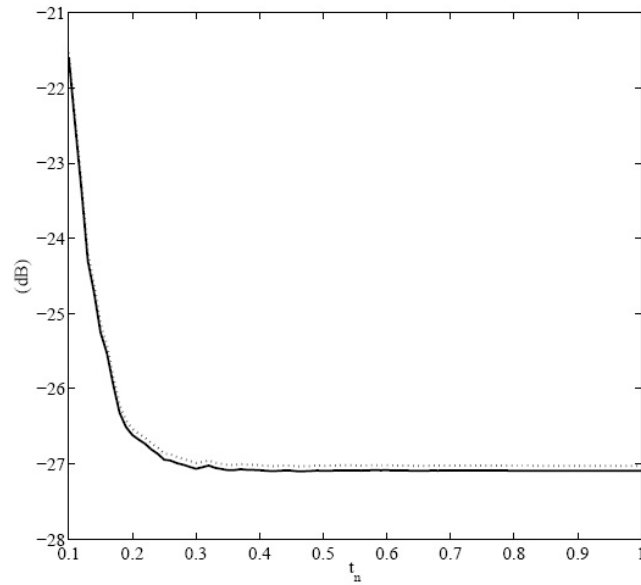


Figura 3.4: Errores de alisado de punto fijo AL (línea continua) y EL (línea de puntos).

Capítulo 4

Conclusiones y Líneas Abiertas

4.1. Introducción

Como mencionamos en capítulos anteriores, el objetivo principal de esta tesis doctoral es ilustrar la mayor idoneidad del procesamiento AL en diversas áreas del procesamiento de la señal: modelización, simulación y estimación de señales impropias para dos tipos de señales: de Markov y ampliamente factorizables.

Con objeto de respaldar esta propuesta, se han proporcionado diferentes resultados que muestran como el uso de un procesamiento AL en detrimento del EL, proporciona una mayor sencillez y ahorro en la complejidad de los desarrollos matemáticos involucrados, además de presentar un mejor rendimiento.

Cabe mencionar que a lo largo de esta memoria se han alcanzado satisfactoriamente todos los objetivos planteados inicialmente (véase prólogo).

4.2. Capítulo 1

En este capítulo se presentan de forma esquemática los conceptos y procedimientos más relevantes para entender los desarrollos teóricos de los resultados que se exponen en los dos siguientes capítulos.

Así, se han introducido los conceptos básicos sobre señales aleatorias complejas de segundo orden y se han repasado las principales soluciones que se pueden encontrar en la literatura dentro del campo de la estimación AL, tanto lineal como no lineal, bajo una formulación discreta.

4.3. Capítulo 2

Con objeto de resolver la carencia en la definición clásica para la condición de Markov en sentido amplio para señales aleatorias complejas impropias, se presentaron algunos ejemplos sobre señales de Markov con valores complejos, que ilustraban la incapacidad de la condición MSD usual para señales impropias y justificaban la necesidad de definir un nuevo tipo de señal de Markov en sentido amplio, denominada MAL. Así, se estudian, a través de un ajuste AL, nuevas caracterizaciones para las señales de MAL, las cuales se basan en propiedades de segundo orden o en las representaciones de espacio de estados.

Adicionalmente, se ha llevado a cabo un estudio de la estructura de correlación de las señales MAL, discutiéndose el problema de modelización para las señales MAL y analizándose el caso estacionario. En concreto, se han propuesto dos modelos (hacia adelante y hacia atrás) para la representación de este tipo de señales (**objetivo 1**). La utilidad de estos modelos se ha analizado en el campo de la simulación, considerando un ejemplo numérico (**objetivos 3 y 7**).

Por otro lado, también se han propuesto algunos algoritmos recursivos de estimación para los problemas de alisado, filtrado y predicción, obtenidos a partir del Filtro de Kalman, aplicándose los resultados a un ejemplo numérico (**objetivos 2 y 7**).

A través de los ejemplos de este capítulo, se han mostrado las ventajas de la representación de espacio de estados asociado a una señal MAL en relación con el modelo de espacio de estados asociado a una señal MSD en dos campos de procesamiento de la señal: la simulación y la estimación (**objetivo 7**).

4.4. Capítulo 3

El objetivo de este capítulo surge tras el estudio y análisis de los resultados obtenidos en Fernández-Alcalá et al. (2012), donde se aplica un tratamiento AL en el diseño de algoritmos de predicción, lineales y no lineales, para un nuevo tipo de señales llamadas ampliamente factorizables.

Esta formulación no requiere postular un modelo dinámico de la señal y, por tanto, es siempre útil que el mecanismo físico de la generación de la señal de interés no se conozca o sea difícil de determinar.

La principal aportación realizada en este capítulo, es la de abordar un problema de estimación diferente a la predicción y el filtrado, como es el

problema de alisado. Más concretamente, se resuelve el problema de alisado para señales impropias ampliamente factorizables con valores complejos, proporcionando algoritmos de alisado de punto fijo, lineales y no lineales, para este tipo de señales.

El camino seguido para la obtención de ambos algoritmos lo marca la metodología de Fernández-Alcalá et al. (2012). Así, en el caso lineal, se explota la información de correlación con el objetivo de formular un algoritmo recursivo para el cálculo eficiente del alisador óptimo de punto fijo de la señal y de su error asociado (**objetivos 4 y 5**).

Por otra parte, en el caso no lineal, la clave está en linealizar la ecuación de observación en cada instante de tiempo, considerando un desarrollo en serie de Taylor de primer orden sobre el predictor de una etapa de la señal dada (**objetivo 6**).

Se concluye este capítulo con el desarrollo de dos ejemplos numéricos, donde se pone de manifiesto el buen comportamiento de los algoritmos de alisado propuestos, lineal y no lineal, mediante la comparación de los estimadores de alisado de punto fijo AL, en contrapartida con los derivados de un procesamiento EL (**objetivo 7**).

4.5. Lineas Abiertas

La línea de investigación sobre metodologías de “Aplicación del Procesamiento Ampliamente Lineal a la Modelización y Estimación de Señales Complejas” no termina con esta tesis doctoral. Se pretende continuar trabajando en el desarrollo de nuevas técnicas que permitan el procesamiento de señales multidimensionales, bajo un enfoque cuaternión.

Los recientes progresos en tecnología, ciencias medioambientales, robótica y biomedicina, justifican la necesidad de procesar señales multidimensionales. Aunque tales señales podrían tratarse desde una perspectiva real-vectorial o complejo-vectorial, estudios recientes han demostrado que el uso de cuaterniones presenta numerosas ventajas en relación a las anteriores, siendo por tanto, el marco adecuado para su análisis.

Básicamente, los cuaterniones pueden considerarse como una extensión no conmutativa de los números complejos que consta de una parte real escalar y una parte vectorial formada por tres variables imaginarias, lo que permite la modelización de señales tridimensionales (3-D) y tetradimensionales (4-D), recogiendo de una forma natural la información compartida entre sus componentes.

Los cuaterniones se han utilizado durante más de 150 años y han encon-

trado aplicaciones en áreas como modelización de rotaciones 3-D, robótica, y modelización molecular, entre otras (ver Cheong Took y Mandic, 2009 y referencias en él). En particular, dentro de la comunidad del procesamiento de la señal y las comunicaciones, el álgebra cuaternión ha cobrado un especial interés en los últimos años debido a que ha sido satisfactoriamente utilizado en diversos problemas tales como el procesamiento de imágenes y el diseño de códigos espacio-temporales, motivando la generalización de diversas técnicas del procesamiento de la señal al caso de señales cuaternión (Choukroun et al., 2006; Miron et al., 2006).

Los resultados en el dominio cuaternión no son extensiones directas de sus homólogos real y complejos-valuados (Mandic y Goh, 2009), pues el álgebra cuaternión trata a los ejes vectoriales como unidades imaginarias, el producto cuaternión es no conmutativo y, a diferencia de los estadísticos en el dominio complejo, la correlación complementaria de una señal cuaternión propia no se anula.

En general, los procedimientos desarrollados para el procesamiento de señales sólo tienen en cuenta la información contenida en la función de correlación. Sin embargo, por analogía con el dominio complejo, esta vía de solución no garantiza el óptimo aprovechamiento de la información estadística de segundo orden disponible. En concreto, Cheong Took y Mandic (2011) demuestran que para este propósito es necesario incorporar las correlaciones complementarias, respondiendo así a una posible impropiedad de los procesos cuaternión implicados. Los beneficios de tal aproximación son análogos a las ventajas que el procesamiento AL da a los datos complejos no circulares. El análisis muestra que la base para este tipo de procesamiento debe considerar un vector de dimensión cuatro cuyos elementos se eligen entre la señal, su conjugada y las tres posibles involuciones.

En esta dirección, proponemos abordar los problemas de modelización, simulación y estimación de señales cuaternión bajo una perspectiva AL.

En concreto, en el campo de la modelización, se pretende:

- Extender el estudio de señales MAL al dominio cuaternión proponiendo expresiones alternativas para la modelización de señales 3-D y 4-D.
- Abordar la modelización de otros sistemas AL en el dominio cuaternión, tales como sistemas ARMA AL o, más general, sistemas de función de transferencia AL.

Por otro lado, consideramos la necesidad de aplicar los modelos propuestos al campo de la simulación de señales aleatorias cuaternión.

Finalmente, en el contexto de las señales cuaternión, se buscará analizar el problema de estimación bajo diferentes estructuras de correlación. En concreto, planteamos las siguientes metas:

- Diseñar algoritmos recursivos para los distintos problemas de estimación (alisado, filtrado y predicción) en señales MAL cuaternión.
- Desarrollar procedimientos recursivos de predicción para sistemas AL cuaternión.
- Obtener algoritmos recursivos de estimación lineal y no lineal para señales con correlaciones finito dimensionales.

Bibliografía

- ADALI, T. Y HAYKIN, S. (2010). *Adaptive Signal Processing: Next Generation Solutions*. Wiley-IEEE Press.
- BEUTLER, F. (1963). Multivariate Wide-Sense Markov Processes and Prediction Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, **34**, 424–438.
- BOX, G.E.P. Y JENKINS, G.M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco.
- BROCKWELL, P.J. Y DAVIS, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York.
- BUZZI, S., LOPS, M. Y SARDELLITTI, S. (2006). Widely Linear Reception Strategies for Layered Space-Time Wireless Communications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **54** (6), 2252–2262.
- CAMBANIS, S. (1973a). Representation of Stochastic Processes of Second Order and Linear Operations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **41** (3), 603–620.
- CAMBANIS, S. (1973b). A General Approach to Linear Mean-Square Estimation Problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-19** (1), 110–114.
- CHEN, M., CHEN, Z. Y CHEN, G. (1997). *Approximate Solutions of Operator Equations*. World Scientific Pub. Co., Singapore.
- CHEONG-TOOK, C. Y MANDIC, D.P. (2009). Adaptive IIR Filtering of Noncircular Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **57** (10), 4111–4118.
- CHEONG TOOK, C. Y MANDIC, D.P. (2010). A Quaternion Widely Linear Adaptive Filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **58** (8), 4427–4431.

- CHEONG TOOK, C. Y MANDIC, D.P. (2011). Augmented Second-Order Statistics of Quaternion Random Signals. *Signal Processing*, **91** (2), 214–224.
- CHEVALIER, P. Y PIPON, F. (2006). New Insights into Optimal Widely Linear Array Receivers for the Demodulation of BPSK, MSK and GMSK Signals Corrupted by Noncircular Interferences-Application to SAIC. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **54** (3), 870–883.
- CHOUKROUN, D.; BAR-ITZHACK, I.Y. Y OSHMAN, Y. (2006). Novel Quaternion Kalman Filter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **42** (1), 174–189.
- DOOB, J.L. (1953). *Stochastic Processes*. John Wiley, New York.
- FERNÁNDEZ-ALCALÁ, R.M., NAVARRO-MORENO, J. Y RUIZ-MOLINA, J.C. (2012). Prediction on Widely Factorizable Signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52** (4), 1789–1794.
- GELB, A. (1989). *Applied Optimal Estimation*. The Analytic Sciences Corporation.
- GERSTACKER, W.H., OBERNOSTERER, F., SHOBER, R., LEHMANN, A.T., LAMPE, A. Y GUNREBEN, P. (2004). Equalization Concepts for Alamouti’s Space-time Block Code. *IEEE Transactions on Communications*, **52** (7), 1178–1190.
- GERSTACKER, W.H., SHOBER, R. Y LAMPE, A. (2003). Receivers with Widely Linear Processing for Frequency-selective Channels. *IEEE Transactions on Communications*, **51** (9), 1512–1523.
- GOH, S.L. Y MANDIC, D.P. (2007). An Augmented Extended Kalman Filter Algorithm for Complex-Valued Recurrent Neural Networks. *Neural Computation*, **19**, 1039–1055.
- HAYKIN, S. (2001). *Kalman Filtering and Neural Networks*. Wiley.
- IBARROLA, P., LEANDRO, P. Y QUESADA, V. (1997). *Teoría de la Probabilidad*. Síntesis S.A., Madrid.
- JAZWINSKI, A.H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, San Diego.
- JONES, P.W. Y SMITH, P. (2010). *Stochastic Processes. An Introduction*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

- KAILATH, T., SAYED, A.H. Y HASSIBI, B. (2000). *Linear Estimation*. Prentice Hall, New Jersey.
- KASPRZYK, A. Y SZCZOTKA, W. (2006). Covariance Structure of Wide-Sense Markov Processes of Order $k \geq 1$. *Applicationes Mathematicae*, **33** (2), 129–143.
- KELLY, E.J. Y ROOT, W.L. (1960). A Representation of Vector-Valued Random Processes. *Journal of Mathematics and Physics*, **39**, 211–216.
- LINDSEY, J.K. (2004). *Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time*. Cambridge University Press, Cambridge.
- MANDIC, D.P. Y GOH, V.S.L. (2009). *Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters, Noncircularity, Widely Linear and Neural Models*. Wiley.
- MANDREKAR, V. (1968). On Multivariate Wide-Sense Markov Processes. *Nagoya Mathematical Journal*, **33**, 7–19.
- MASRY, E. (1970). Expansion of Multivariate Weakly Stationary Stochastic Processes. *Information Sciences 2*, 303–317.
- MILLER, K.S. (1974). *Complex Stochastic Processes. An Introduction to Theory and Applications*. Addison-Wesley, London.
- MIRON, S., LE BIHAN, N. Y MARS, J. (2006). Quaternion-MUSIC for Vector-Sensor Array Processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **54** (4), 1218–1229.
- NAVARRO MORENO, J. (1998). *Estudio de Desarrollos en Serie Aproximados Tipo Karhunen-Loève de un Proceso Estocástico. Aplicaciones a la Modelización y Predicción Estocástica*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- NAVARRO-MORENO, J., FERNÁNDEZ-ALCALÁ, R.M. Y RUIZ-MOLINA, J.C. (2006). Approximate Series Representations of Linear Operations on Second-Order Stochastic Processes: Application to Simulation. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52** (4), 1789–1794.
- NAVARRO-MORENO, J. (2008). ARMA Prediction of Widely Linear Systems by Using the Innovations Algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **56** (7), 3061–3068.

- NAVARRO-MORENO, J., ESTUDILLO, M.D., FERNÁNDEZ-ALCALÁ, R.M. Y RUIZ-MOLINA, J.C. (2009a). Estimation of Improper Complex-Valued Random Signals in Colored Noise by Using the Hilbert Space Theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, **55** (6), 2859–2867.
- NAVARRO-MORENO, J., MORENO-KAYSER, J., FERNÁNDEZ-ALCALÁ, R.M. Y RUIZ-MOLINA, J.C. (2009b). Widely Linear Estimation Algorithms for Second-Order Stationary Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **57** (12), 4930–4935.
- NAVARRO-MORENO, J., MORENO-KAYSER, J., FERNÁNDEZ-ALCALÁ, R.M. Y RUIZ-MOLINA, J.C. (2013). Widely Linear Prediction for Transfer Function Models Based on the Infinite Past. *Computational Statistics and Data Analysis*, **58** (c), 139–146.
- OYA, A., NAVARRO-MORENO, J. Y RUIZ-MOLINA, J.C. (2009). A Numerical Solution for Multichannel Detection. *IEEE Transactions on Communications*, **57** (6), 1734–1742.
- PICINBONO, B. (1996). Second-Order Complex Random Vectors and Normal Distributions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44** (10), 2637–2640.
- PICINBONO, B. Y BONDON, P. (1997). Second-Order Statistics of Complex Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **45** (2), 411–420.
- PICINBONO, B. Y CHEVALIER, P. (1995). Widely Linear Estimation with Complex Data. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **43** (8), 2030–2033.
- POOR, H.V. (1994). *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. Springer-Verlag, New York.
- POOR, H.V. Y CHANG, CH. (1985). A Reduced-Complexity Quadratic Structure for the Detection of Stochastic Signals. *Journal of the Acoustical Society of America*, **76**, 1652–1657.
- PROAKIS, J.G. (1989). *Digital Communications*. McGraw-Hill.
- RUBIN-DELANCHY, P. Y WALDEN, A.T. (2007). Simulation of Improper Complex-Valued Sequences. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **55** (11), 5517–5521.

- RUBIN-DELANCHY, P. Y WALDEN, A.T. (2008). Kinematics of Complex-Valued Time Series. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **56** (9), 4189–4198.
- RUYMGAART, P.A. Y SOONG, T.T. (1988). *Mathematics of Kalman-Bucy Filtering*. Springer-Verlag, Germany.
- RUIZ-MOLINA, J.C., NAVARRO-MORENO, J. Y ESTUDILLO, M.D. (2004). On the Problem of Estimating a Signal Correlated with the Observation Noise. *IEEE Signal Processing Letters*, **11** (3) , 330–333.
- SCHREIER, P.J. Y SCHARF, L.L. (2003). Second-Order Analysis of Improper Complex Random Vectors and Processes. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **51** (3), 714–725.
- SCHREIER, P.J. Y SCHARF, L.L. (2010). *Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data*. Cambridge University Press, Cambridge.
- SCHREIER, P.J., SCHARF, L.L. Y HANSEN, A. (2006). A Generalized Likelihood Ratio Test for Impropriety of Complex Signals. *IEEE Signal Processing Letters*, **13** (7), 433–436.
- SCHREIER, P.J., SCHARF, L.L. Y MULLIS, C.T. (2005). Detection and Estimation of Improper Complex Random Signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51** (1), 306–312.
- SNYDER D.L. (1972). Smoothing for Doubly Stochastic Poisson Processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **IT-18**, 558–562.
- SUGISAKA M. (1983). The Design of On-line Least-Squares Estimators Given Covariance Specifications Via an Imbedding Method. *Applied Mathematics and Computation*, **13**, 55–85.
- STAKGOLD, I. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. John Wiley and Sons, Inc, 1998.
- TODOROVIC, P. (1992). *An Introduction to Stochastic Processes and their Applications*. Springer-Verlag, New York.
- VALDERRAMA BONNET, M.J. Y RUIZ MOLINA, J.C. (1996). *Filtrado de Kalman. Aplicaciones en Economía e Ingeniería*. Ediciones Universitarias de Barcelona, Barcelona.
- VAN TREES, H.L. (1968). *Detection, Estimation and Modulation Theory. Part I*. Wiley, New York.

- WAHLBERG, P. Y SCHREIER, P.J. (2008). Spectral Relations for Multidimensional Complex Improper Stationary and (Almost) Cyclostationary Processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **54** (4), 1670–1682.
- WEI, W.W.S. (1990). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. Reading, M.A.: Addison-Wesley.
- WONG, E. Y HAJEK, B. (1985). *Stochastic Processes in Engineering Systems*. Springer-Verlag, New York.
- XIA Y., CHEONGTOOK C. AND MANDIC D. P. (2010) An Augmented Affine Projection Algorithm for the Filtering of Noncircular Complex Signals. *Signal Processing*, **90** (6), 1788–1799.
- YOON, Y. Y KIM, H.M. (2006). An Efficient Blind Multiuser Detection for Improper DS/CDMA Signals. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, **55** (2), 572–582.